Κεφάλαιο 1ο

Ευθύγραμμες κινήσεις

Ο μαθητής που έχει μελετήσει το κεφάλαιο ευθύγραμμες κινήσεις πρέπει:

- ✓ Να γνωρίζει ποια μεγέθη λέγονται μονόμετρα και ποια διανυσματικά.
- ✓ Να γνωρίζει τις έννοιες χρονική στιγμή και χρονική διάρκεια.
- ✓ Να ξεχωρίζει το διάνυσμα θέσης από την μετατόπιση και το διάστημα.
- ✓ Να γνωρίζει τους ορισμούς της μέσης αριθμητικής και διανυσματικής ταχύτητας.
- ✓ Να γνωρίζει τον ορισμό της επιτάχυνσης.
- ✓ Να έχει γνώση των νόμων της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης των εξισώσεων και των διαγραμμάτων που την εκφράζουν.
- ✓ Να έχει γνώση των νόμων της ευθύγραμμης ομαλά μεταβαλλόμενης κίνησης των εξισώσεων και των διαγραμμάτων που την εκφράζουν.
- ✓ Να σχεδιάζει τα διαγράμματα α-t, υ-t, x-t στις κινήσεις.
- ✓ Να γνωρίζει στις διαδοχικές κινήσεις ότι το τέλος της μίας είναι η αρχή της άλλης και η τελική ταχύτητα στην μία είναι η αρχική της επόμενης.
- ✓ Να γνωρίζει ότι κατά τη συνάντηση σωμάτων, το σημείο συνάντησης είναι το κοινό σημείο της τροχιάς.
- ✓ Να μπορεί σε διάγραμμα να ξεχωρίζει κινήσεις και να γνωρίζει τι δίνει το εμβαδόν και η κλίση κάθε διαγράμματος.

Τυπολόγιο 1ου Κεφαλαίου

Ευθύγραμμη κίνηση	
ταχύτητα:	$\vec{\upsilon} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$
μέση ταχύτητα:	$\upsilon_{\mu} = \frac{s}{t}$
επιτάχυνση:	$\vec{\alpha} = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}$
Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση:	$\vec{\upsilon} = \text{σταθ}$, $\Delta x = \upsilon \cdot \Delta t$ ή $x = \upsilon \cdot t$
Ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη:	$\vec{\alpha} = \text{σταθ}$ $\upsilon = \upsilon_0 \pm \alpha t$ $x = \upsilon_0 t \pm \frac{1}{2}\alpha t^2$ $\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^{\,2} \pm 2\alpha x}$ (εξίσωση τροχιάς)
Ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη που το κινητό σταματά	$t = \frac{\upsilon_0}{\alpha}$ $x = \frac{\upsilon_0^{\,2}}{2\alpha}$

Ευθύγραμμες κινήσεις: Τύποι - Βασικές έννοιες

Τι γνωρίζουμε για: χρονική στιγμή - χρονική διάρκεια - θέση - μετατόπιση - διάστημα.

Η **χρονική στιγμή** t προσδιορίζει το πότε συμβαίνει ένα γεγονός, ενώ η **χρονική διάρκεια** $\mathbf{\Delta t = t_2 - t_1}$ που είναι η διαφορά δύο χρονικών στιγμών, καθορίζει το πόσο διαρκεί ένα φαινόμενο.

Κάθε ευθύγραμμη κίνηση την εφοδιάζουμε με έναν προσανατολισμένο άξονα, η διεύθυνση του οποίου συμπίπτει με την ευθεία της κίνησης. Έτσι **διάνυσμα θέσης** $\vec{x}$ είναι το διάνυσμα που έχει αρχή την αρχή του άξονα και τέλος το σημείο του άξονα στο οποίο βρίσκεται το κινητό. Η αλγεβρική τιμή του διανύσματος προσδιορίζει τη θέση του κινητού μια δεδομένη χρονική στιγμή. **Η μετατόπιση** είναι η μεταβολή του διανύσματος της θέσης $\mathbf{\Delta\vec{x} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1}$. Είναι ένα διάνυσμα με αρχή την αρχική θέση του κινητού και τέλος την τελική.

Το διάστημα είναι το μήκος της συνολικής διαδρομής που διάνυσε το κινητό και είναι μονόμετρο μέγεθος με θετική πάντα τιμή.

Ποιός είναι ο ορισμός της μέσης (διανυσματικής) ταχύτητας και μέσης αριθμητικής ταχύτητας;

Η μέση (διανυσματική) ταχύτητα εκφράζεται με το πηλίκο της μετατόπισης προς το χρονικό διάστημα στο οποίο πραγματοποιήθηκε.

$\vec{\upsilon}_{\mu} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{t_2 - t_1}$. Μονάδες μέτρησης στο (S.I) είναι το 1 m/s.

Η μέση αριθμητική ταχύτητα είναι αυτή που παρουσιάζει πρακτικό ενδιαφέρον και ισούται με το πηλίκο του διανυθέντος διαστήματος προς το αντίστοιχο χρονικό διάστημα.

$$\upsilon_{\mu} = \frac{s}{t}$$

Η στιγμιαία ταχύτητα ισούται με την τιμή που τείνει να πάρει η μέση διανυσματική ταχύτητα όταν το χρονικό διάστημα γίνεται πολύ μικρό. Αναφέρεται σε χρονική στιγμή και είναι ο ρυθμός μεταβολής της θέσης.

Ποια κίνηση λέγεται ευθύγραμμη ομαλή;

Ευθύγραμμη ομαλή λέγετε η κίνηση κατά την οποία το κινητό κινούμενο ευθύγραμμα διατηρεί σταθερό το διάνυσμα της ταχύτητας. Έτσι σε ίσα χρονικά διαστήματα οι μετατοπίσεις του είναι ίσες.

Η εξίσωση της κίνησης είναι: $x = x_0 + \upsilon(t - t_0)$

Για $t_0 = 0$ *(αρχικός χρόνος)* είναι $x_0 = 0$ *(αρχική θέση)* τότε: $x = \upsilon \cdot t$

Ποιος είναι ο ορισμός της επιτάχυνσης;

Η επιτάχυνση είναι ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

$\vec{\alpha} = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}$ μονάδα μέτρησης στο SI: $1 m / s^2$.

Μία κίνηση χαρακτηρίζεται επιταχυνόμενη όταν αυξάνεται το μέτρο της ταχύτητας και επιβραδυνόμενη όταν το μέτρο της ταχύτητας μειώνεται. Στην επιταχυνόμενη κίνηση ταχύτητα και επιτάχυνση έχουν ίδια κατεύθυνση ενώ στην επιβραδυνόμενη αντίθετη.

Ποια κίνηση λέγετε ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη, ποιες είναι οι εξισώσεις της και τα διαγράμματα;

Κίνηση στην οποία το κινητό κινούμενο ευθύγραμμα μεταβάλλει την ταχύτητά του με σταθερό ρυθμό. Δηλαδή σε ίσα χρονικά διαστήματα παρατηρούνται ίσες μεταβολές της ταχύτητας. Η επιτάχυνση της κίνησης διατηρείται σταθερή.

Εξίσωση ταχύτητας:

$$\upsilon = \upsilon_0 + \alpha\left(t - t_0\right)$$

Αν τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ είναι $\upsilon = \upsilon_0$ τότε: $\upsilon = \upsilon_0 + \alpha \cdot t$

Αν τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ είναι $\upsilon_0 = 0$: $\upsilon = \alpha \cdot t$

Αν η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη $\upsilon = \upsilon_0 - \alpha \cdot t$

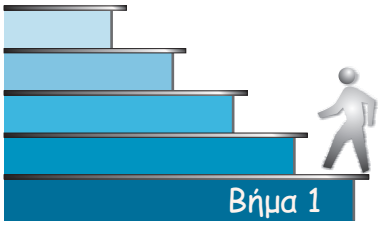
Εξίσωση κίνησης:

$$\Delta x = \upsilon_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2}\alpha \cdot \Delta t^2, \quad \begin{array}{l} \Delta t = t - t_0 \\ \Delta x = x - x_0 \end{array}$$

Για τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ είναι $x_0 = 0$ τότε: $x = \upsilon_0 \cdot t + \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2$

Για τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ είναι $x_0 = 0$ και $\upsilon_0 = 0$: $x = \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2$

Αν η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη $x = \upsilon_0 t - \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2$

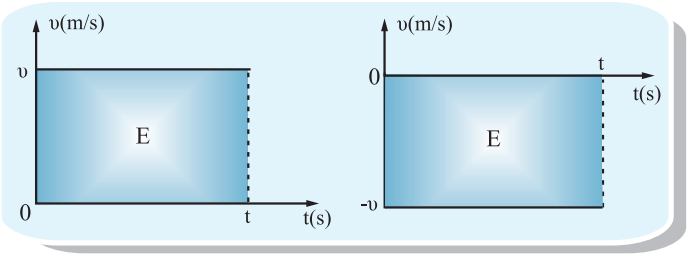


Μαθαίνουμε τις αποδείξεις

Απόδειξη 1
Διαγράμματα και πληροφορίες που παρέχουν

α. Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση

Διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου $\upsilon = f(t)$:



Αν υ > 0 **Αν υ < 0**

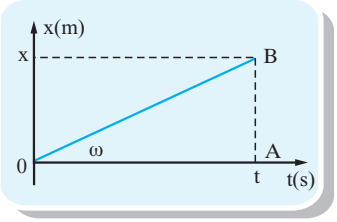
Το εμβαδόν που περικλείεται ανάμεσα στη γραφική παράσταση και τον άξονα των χρόνων είναι ίσο αριθμητικά με την μετατόπιση Δx του κινητού στο χρονικό διάστημα Δt. Όταν η ταχύτητα είναι θετική το εμβαδόν θα λαμβάνεται με θετικό πρόσημο και η μετατόπιση θα προκύπτει θετική. Όταν η ταχύτητα είναι αρνητική το εμβαδόν θα λαμβάνεται με αρνητικό πρόσημο και η μετατόπιση θα προκύπτει αρνητική.

Διάγραμμα θέσης - χρόνου $x = f(t)$:

Αν x = υ·t και υ > 0.

Η κλίση της ευθείας αριθμητικά, είναι ίση με την ταχύτητα της κίνησης.

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x-0}{t-0} = \frac{x}{t} = \upsilon$$



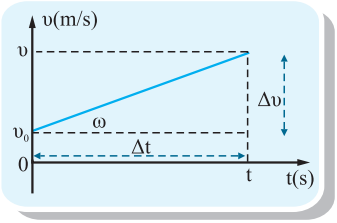
Το πρόσημο της ταχύτητας είναι ίδιο με το πρόσημο της μετατόπισης Δx. Μπορεί η θέση να είναι θετική και η ταχύτητα αρνητική.

β. Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση

Διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου $\upsilon = f(t)$: Αν $\upsilon = \upsilon_0 + \alpha \cdot t$ και $\upsilon_0 > 0$, $\alpha > 0$

Η κλίση της ευθείας αριθμητικά είναι ίση με την επιτάχυνση της κίνησης

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{t - t_0} = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{t} = \alpha$$



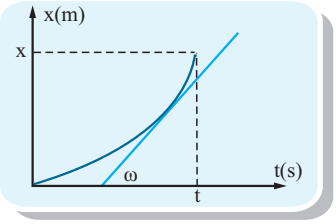
Αν $\upsilon = \alpha \cdot t$ και $\alpha > 0$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{\upsilon - 0}{t - 0} = \alpha$$

Σε κάθε διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου αποδεικνύεται ότι το εμβαδόν που περικλείεται ανάμεσα στην καμπύλη και στον άξονα των χρόνων αριθμητικά είναι ίσο με την μετατόπιση Δx για το αντίστοιχο χρονικό διάστημα.

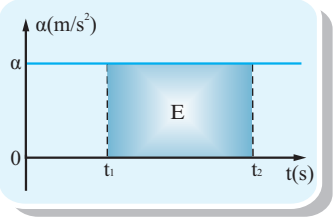
Διάγραμμα θέσης - χρόνου $x = f(t)$:

$$x = \upsilon_0 \cdot t + \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2 \text{ ή } x = \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2, \text{ αν } \upsilon_0 = 0$$



Η κλίση της καμπύλης αριθμητικά είναι ίση με την ταχύτητα την συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Παρατηρούμε ότι η κλίση αυξάνεται.

Διάγραμμα επιτάχυνσης - χρόνου $\alpha = f(t)$:



Το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης και του άξονα των χρόνων αριθμητικά είναι ίσο με την μεταβολή της ταχύτητας για το αντίστοιχο χρονικό διάστημα.

$$E \overset{\alpha\rho}{=} \alpha \cdot \Delta t = \alpha(t_2 - t_1) = \Delta\upsilon$$

γ. Ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση

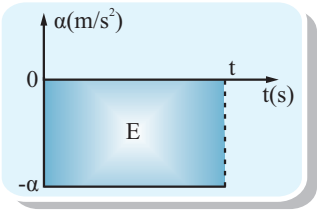
Θεωρούμε την ταχύτητα θετική και την επιτάχυνση αρνητική (επιβράδυνση).

Διάγραμμα επιτάχυνσης - χρόνου

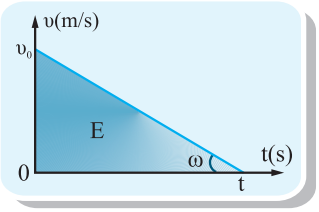
$\upsilon_0 > 0$, $\alpha < 0$

$$\alpha = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{0 - \upsilon_0}{t - 0} = -\varepsilon\varphi\omega$$

$$\Delta x \overset{\alpha\rho}{=} E$$

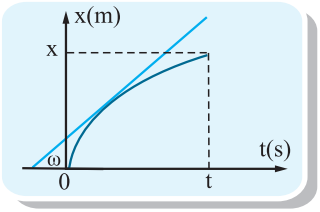


Διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου



$$\upsilon = \upsilon_0 - \alpha \cdot t$$

Διάγραμμα θέσης - χρόνου



$$x = \upsilon_0 \cdot t - \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2$$

Η κλίση της καμπύλης x(t), (στιγμιαία ταχύτητα) μειώνεται.

Απόδειξη 2

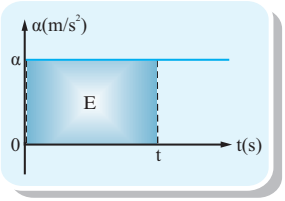
Υπολογισμός εξίσωσης κίνησης στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση

$$\upsilon = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x = \upsilon \cdot \Delta t \Rightarrow x - x_0 = \upsilon(t - t_0) \Rightarrow x = x_0 + \upsilon(t - t_0)$$

για $x_0 = 0$ και $t_0 = 0$, τότε $x = \upsilon \cdot t$

Απόδειξη 3

Εξίσωση ταχύτητας στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη



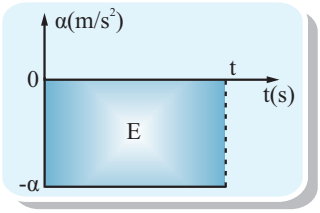
$$\Delta\upsilon \overset{\alpha\rho}{=} E \quad (E = \text{εμβαδόν})$$

$$E \overset{\alpha\rho}{=} \alpha \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta\upsilon = \alpha(t - t_0) \Rightarrow \upsilon - \upsilon_0 = \alpha(t - t_0)$$

για $t_0 = 0$, $\upsilon - \upsilon_0 = \alpha \cdot t$, τότε $\upsilon = \upsilon_0 + \alpha \cdot t$

Απόδειξη 4

Εξίσωση ταχύτητας στην ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη



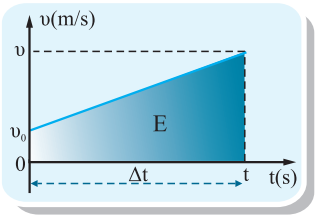
$$\Delta\upsilon \overset{\alpha\rho}{=} E$$

$$E \overset{\alpha\rho}{=} -\alpha \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta\upsilon = -\alpha(t - t_0) \Rightarrow \upsilon - \upsilon_0 = -\alpha(t - t_0)$$

για $t_0 = 0$, $\upsilon - \upsilon_0 = -\alpha \cdot t$, τότε $\upsilon = \upsilon_0 - \alpha \cdot t$

Απόδειξη 5

Εξίσωση θέσης στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη



$$E \overset{\text{αριθ}}{=} \Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{\upsilon + \upsilon_0}{2}\Delta t \quad \text{επειδή } \upsilon = \upsilon_0 + \alpha\Delta t$$

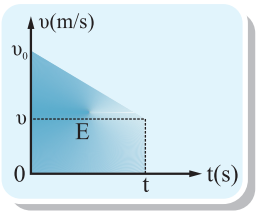
$$\Delta x = \frac{\upsilon_0 + \alpha\cdot\Delta t + \upsilon_0}{2}\Delta t \Rightarrow \Delta x = \frac{2\upsilon_0 + \alpha\cdot\Delta t}{2}\Delta t \Rightarrow$$

$$\Delta x = \upsilon_0\Delta t + \frac{1}{2}\alpha\cdot\Delta t^2 \Rightarrow x - x_0 = \upsilon_0\left(t - t_0\right) + \frac{1}{2}\alpha\left(t - t_0\right)^2$$

για $x_0 = 0$ και $t_0 = 0$ η εξίσωση έχει την μορφή $x = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}\alpha\cdot t^2$

Απόδειξη 6

Εξίσωση θέσης στην ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη



$$E \overset{\text{αριθ}}{=} \Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{\upsilon + \upsilon_0}{2}\Delta t \quad \text{επειδή } \upsilon = \upsilon_0 - \alpha\Delta t$$

$$\Delta x = \frac{\upsilon_0 - \alpha\cdot\Delta t + \upsilon_0}{2}\Delta t \Rightarrow \Delta x = \frac{2\upsilon_0 - \alpha\cdot\Delta t}{2}\Delta t \Rightarrow$$

$$\Delta x = \upsilon_0\Delta t - \frac{1}{2}\alpha\cdot\Delta t^2 \Rightarrow x - x_0 = \upsilon_0\left(t - t_0\right) - \frac{1}{2}\alpha\left(t - t_0\right)^2$$

για $x_0 = 0$ και $t_0 = 0$ η εξίσωση έχει την μορφή $x = \upsilon_0 t - \frac{1}{2}\alpha\cdot t^2$

Απόδειξη 7

- **Πώς υπολογίζουμε τη μετατόπιση στην διάρκεια κάποιου δευτερόλεπτου;**
  Αν για παράδειγμα ζητείται η μετατόπιση ενός κινητού που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση κατά τη διάρκεια του 4ου δευτερολέπτου εργαζόμαστε ως εξής:

  Υπολογίζουμε την θέση του κινητού την χρονική στιγμή $t_3 = 3s$ και την χρονική στιγμή $t_4 = 4s$. Δηλαδή (υποθέτουμε $t_0 = 0$, $x_0 = 0$):

  $$x_3 = \upsilon_0 \cdot t_3 + \frac{1}{2}\alpha t_3{}^2 \text{ και } x_4 = \upsilon_0 \cdot t_4 + \frac{1}{2}\alpha t_4{}^2$$

  Η ζητούμενη μετατόπιση ισούται με: $\Delta x = x_4 - x_3$

  Η παραπάνω μετατόπιση μπορεί να υπολογιστεί και γραφικά από το εμβαδόν σε διάγραμμα $\upsilon - t$.

Απόδειξη 8

Στην ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση όταν το κινητό τελικά σταματά

- Στην ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση όπου το κινητό τελικά σταματά, ο ολικός χρόνος και το ολικό διάστημα μέχρι να σταματήσει είναι:

$$\left.\begin{array}{l}\upsilon=\upsilon_0-\alpha\cdot t\\ \upsilon=0\end{array}\right\}t=\frac{\upsilon_0}{\alpha}\ (1)\qquad x=\upsilon_0 t-\frac{1}{2}\alpha\cdot t^2\overset{(1)}{\Rightarrow}x=\upsilon_0\frac{\upsilon_0}{\alpha}-\frac{1}{2}\alpha\cdot\frac{\upsilon_0{}^2}{\alpha^2}\Rightarrow x=\frac{\upsilon_0{}^2}{2\alpha}$$

Απόδειξη 9

Σχέση που συνδέει την ταχύτητα με τη μετατόπιση στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη (ανεξάρτητη χρόνου).

Εξίσωση ταχύτητας

$$\upsilon=\upsilon_0+\alpha\cdot t$$

Εξίσωση μετατόπισης

$$x=\upsilon_0\cdot t+\frac{1}{2}\alpha\cdot t^2$$

Από την πρώτη σχέση επιλύοντας ως προς το χρόνο: $t=\dfrac{\upsilon-\upsilon_0}{\alpha}$

Και με αντικατάσταση στη δεύτερη:

$$x=\upsilon_0\cdot\frac{\upsilon-\upsilon_0}{\alpha}+\frac{1}{2}\alpha\cdot\left(\frac{\upsilon-\upsilon_0}{\alpha}\right)^2\Rightarrow x=\frac{\upsilon_0\cdot\upsilon-\upsilon_0^2}{\alpha}+\frac{\upsilon^2-2\upsilon_0\cdot\upsilon+\upsilon_0{}^2}{2\alpha}\Rightarrow$$

$$x=\frac{\upsilon^2-\upsilon_0{}^2}{2\alpha}\Rightarrow\upsilon_0^2=\upsilon^2-2\alpha\cdot x\Rightarrow\upsilon^2=\upsilon_0^2+2\alpha\cdot x\ \text{ ή }\ \upsilon=\sqrt{\upsilon_0^2+2\alpha x}$$

Απόδειξη 10

Σχέση που συνδέει την ταχύτητα με τη μετατόπιση στην ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη (ανεξάρτητη χρόνου).

Εξίσωση ταχύτητας

$$\upsilon=\upsilon_0-\alpha\cdot t$$

Εξίσωση μετατόπισης

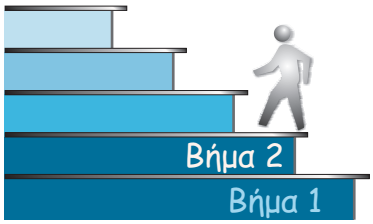
$$x=\upsilon_0\cdot t-\frac{1}{2}\alpha\cdot t^2$$

Από την πρώτη σχέση επιλύοντας ως προς το χρόνο: $t=\dfrac{\upsilon_0-\upsilon}{\alpha}$

Και με αντικατάσταση στη δεύτερη:

$$x=\upsilon_0\cdot\frac{\upsilon_0-\upsilon}{\alpha}-\frac{1}{2}\alpha\cdot\left(\frac{\upsilon_0-\upsilon}{\alpha}\right)^2\Rightarrow x=\frac{\upsilon_0^2-\upsilon_0\cdot\upsilon}{\alpha}-\frac{\upsilon_0{}^2-2\upsilon_0\cdot\upsilon+\upsilon^2}{2\alpha}\Rightarrow$$

$$x=\frac{\upsilon_0{}^2-\upsilon^2}{2\alpha}\Rightarrow\upsilon^2=\upsilon_0^2-2\alpha\cdot x\Rightarrow\ \text{ ή }\ \upsilon=\sqrt{\upsilon_0^2-2\alpha\cdot x}$$



Επαναλαμβάνουμε τις ασκήσεις “κλειδιά”

Α. Από το σχολικό βιβλίο ΦΥΣΙΚΗ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ έκδοση 2003.

σ. 64: Ερωτήσεις 15, 16, 17

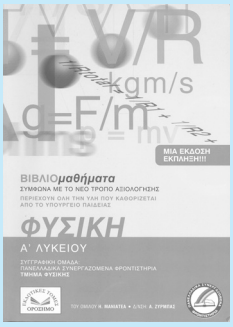
σ. 66: Ερωτήσεις 26, 27, 30, 31

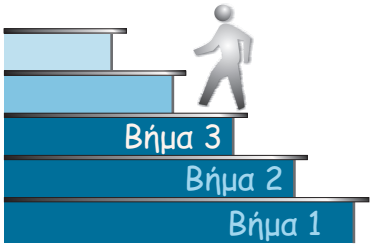
σ. 70: Ασκήσεις 9, 11, 13, 16, 18, 19

Β. Από τα Βιλιομαθήματα ΦΥΣΙΚΗ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ εκδόσεις “ΟΡΟΣΗΜΟ”

σ. 19: Παραδείγματα 2, 6

σ. 27: Προτεινόμενα θέματα 11, 14, 19, 20





Λύνουμε περισσότερες ασκήσεις

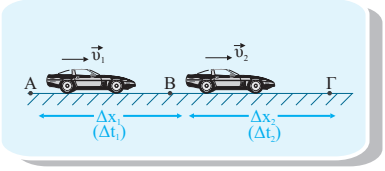
1. **Τρείς πόλεις Α, Β, Γ βρίσκονται στην ίδια νοητή ευθεία. Η πόλη Α απέχει απ' την Β 10 Km και η Β απ' την Γ 20 Km. Ένα αυτοκίνητο που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, κινείται με ταχύτητα 20 m/s απ' την πόλη Α στην πόλη Β και με ταχύτητα 30 m/s απ' την Β στη Γ. Να υπολογιστούν:**

α. η συνολική απόσταση που θα διανύσει

β. ο συνολικός χρόνος κίνησης

γ. η μέση ταχύτητα για ολόκληρη τη διαδρομή

δ. Να γίνει το διάγραμμα υ-t.



Λύση:

α. $S_{ολ} = S_{AB} + S_{B\Gamma} = 10Km + 20Km = 30Km = 30 \cdot 1000m = 3 \cdot 10^4 m$

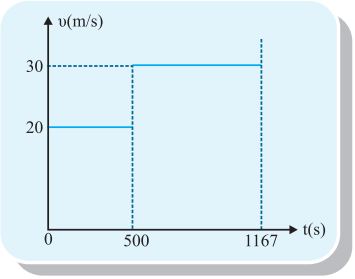
β. $A \rightarrow B : \upsilon_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta t_1} \Rightarrow \Delta t_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\upsilon_1} = \dfrac{S_{AB}}{\upsilon_1} = \dfrac{10000\,m}{20\,m/s} \Rightarrow \Delta t_1 = 500s$

$B \rightarrow \Gamma : \upsilon_2 = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta t_2} \Rightarrow \Delta t_2 = \dfrac{\Delta x_2}{\upsilon_2} = \dfrac{S_{B\Gamma}}{\upsilon_2} = \dfrac{20000\,m}{30\,m/s} \Rightarrow \Delta t_2 \simeq 667s$

Άρα $\Delta t_{ολ} = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 1167s$

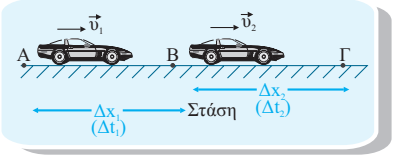
γ. $\upsilon_\mu = \dfrac{\Delta x_{ολ}}{\Delta t_{ολ}} = \dfrac{S_{ολ}}{\Delta t_{ολ}} = \dfrac{30000\,m}{1167\,s} = 25,7\,m/s$

δ.



2. Ποδήλατο ξεκινάει απ' την πόλη Α και φτάνει στην πόλη Β, που απέχει απόσταση 2000m, κινούμενο με σταθερή ταχύτητα $\upsilon_1 = 10\,m/s$. Μετά από στάση 15min, ξεκινάει με ταχύτητα $\upsilon_2 = 20\,m/s$ και φτάνει στην πόλη Γ μετά από 3min. Να βρεθούν:

α. ο συνολικός χρόνος που έκανε για να πάει απ' την πόλη Α στην πόλη Γ
β. η συνολική απόσταση που διένυσε
γ. η μέση ταχύτητα για όλη τη διαδρομή
δ. να γίνουν τα διαγράμματα υ-t, x-t.



Λύση:

$$A \to B: \upsilon_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{\Delta x_1}{\upsilon_1} = \frac{S_{B\Gamma}}{\upsilon_1} = \frac{2000\,m}{10\,m/s} = 200s$$

Στάση στην πόλη Β: $\Delta t = 15\,min = 15 \cdot 60s = 900s$

$B \to \Gamma: \Delta t_2 = 3\,min = 3 \cdot 60s = 180s$

$$\upsilon_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} \Rightarrow \Delta x_2 = \upsilon_2 \cdot \Delta t_2 = 20m/s \cdot 180s = 3600m$$

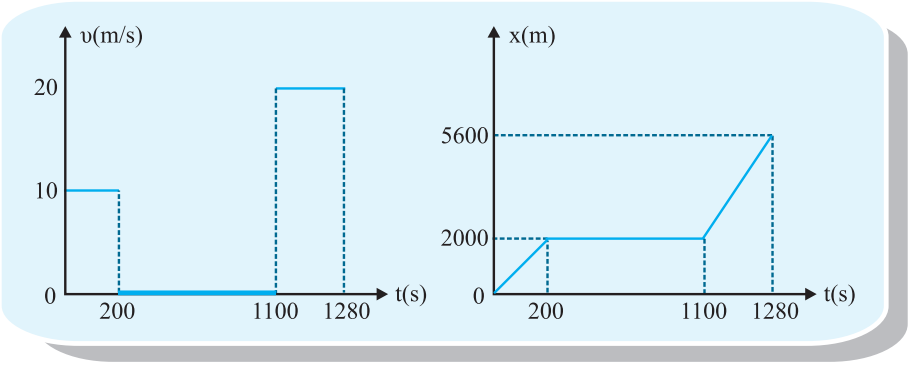
α. $\Delta t_{o\lambda} = \Delta t_1 + \Delta t + \Delta t_2 = 200s + 900s + 180s = 1280s$

β. $\Delta x_{o\lambda} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 2000m + 3600m = 5600m$

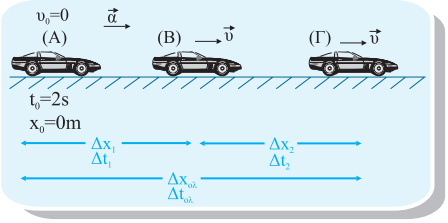
άρα $S_{o\lambda} = \Delta x_{o\lambda} = 5600m$

γ. $\upsilon_\mu = \dfrac{\Delta x_{o\lambda}}{\Delta t_{o\lambda}} = \dfrac{5600\,m}{1280\,s} = 4{,}375\,m/s$

δ.



3. **Ένα σώμα ξεκινάει απ' την ηρεμία και κινείται ευθύγραμμα με σταθερή επιτάχυνση $\alpha = 3m/s^2$ μέχρις ότου αποκτήσει ταχύτητα $\upsilon = 30m/s$. Στη συνέχεια εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Να βρεθούν:**



α. Σε πόσο χρόνο θα καλύψει απόσταση 350m;

β. Να γίνουν τα διαγράμματα α-t, υ-t, x-t αν $t_0 = 2s$, $x_0 = 0m$

Λύση:

$A \rightarrow B$: ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα

$$\upsilon = \alpha \cdot \Delta t_1 \quad (1), \quad \Delta x_1 = \frac{1}{2}\alpha \cdot \Delta t_1^2 \quad (2)$$

$B \rightarrow \Gamma$: ευθύγραμμη ομαλή: $\upsilon = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta t_2}$ (3)

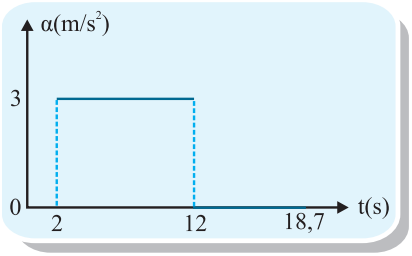
Επίσης $\Delta x_{ολ} = \Delta x_1 + \Delta x_2$ (4), $\Delta t_{ολ} = \Delta t_1 + \Delta t_2$ (5)

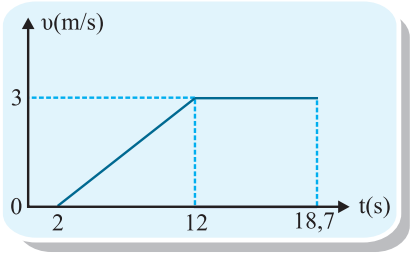
α. $(1) \Rightarrow \Delta t_1 = \dfrac{\upsilon}{\alpha} \Rightarrow \Delta t_1 = 10s$, $(2) \Rightarrow \Delta x_1 = \dfrac{1}{2}\alpha \cdot \Delta t_1^2 \Rightarrow \Delta x_1 = 150m$

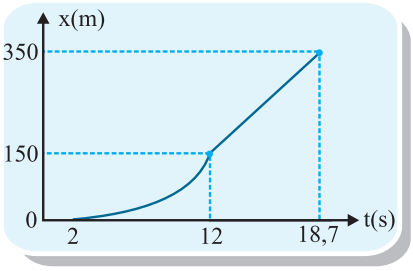
$(4) \Rightarrow \Delta x_2 = \Delta x_{ολ} - \Delta x_1 \Rightarrow \Delta x_2 = 350m - 150m \Rightarrow \Delta x_2 = 200m$

$(3) \Rightarrow \Delta t_2 = \dfrac{\Delta x_2}{\upsilon} \Rightarrow \Delta t_2 = \dfrac{200m}{30m/s} \Rightarrow \Delta t_2 = 6,7s$ άρα $(5) \Rightarrow \Delta t_{ολ} = 16,7s$

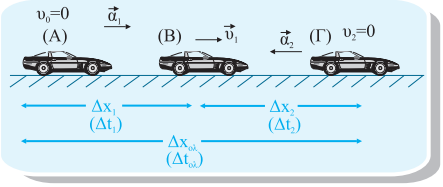
β.







4. **Ένα κινητό ξεκινάει απ' την ηρεμία και κινείται με σταθερή επιτάχυνση $\alpha_1 = 4\,m/s^2$ για χρόνο 10s. Στη συνέχεια κάνει επιβραδυνόμενη κίνηση με σταθερή επιβράδυνση $\alpha_2 = 5\,m/s^2$. Να βρεθούν:**



α. ο ολικός χρόνος κίνησης
β. η συνολική μετατόπιση
γ. η μέση ταχύτητα σ' όλη τη διάρκεια της κίνησής του
δ. να γίνουν τα διαγράμματα α-t, υ-t, x-t

Λύση:

$A \to B$: ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς υ_0

$\upsilon_1 = \alpha_1 \cdot \Delta t_1 \quad (1)$ και $\Delta x_1 = \frac{1}{2}\alpha_1 \cdot \Delta t_1^2 \quad (2)$

$B \to \Gamma$: ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα υ_1

$\upsilon_2 = \upsilon_1 - \alpha_2 \cdot \Delta t_2 \quad (3)$ και $\Delta x_2 = \upsilon_1 \cdot \Delta t_2 - \frac{1}{2}\alpha_2 \cdot \Delta t_2^2 \quad (4)$

α. $\Delta t_{ολ} = \Delta t_1 + \Delta t_2 \quad (5)$ επειδή $\Delta t_1 = 10\,s$

$(1) \Rightarrow \upsilon_1 = \alpha \cdot t \Rightarrow \upsilon_1 = 4\,m/s^2 \cdot 10\,s \Rightarrow \upsilon_1 = 40\,m/s$

$(3) \xrightarrow{\upsilon_2 = 0} 0 = 40\,m/s - 5\,m/s^2 \cdot \Delta t_2 \Rightarrow \Delta t_2 = 8\,s$ άρα $(5) \Rightarrow \Delta t_{ολ} = 18\,s$

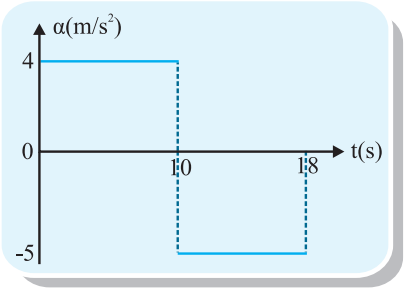
β. $(2) \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{1}{2} \cdot 4\,m/s^2 \cdot 100\,s^2 \Rightarrow \Delta x_1 = 200\,m$

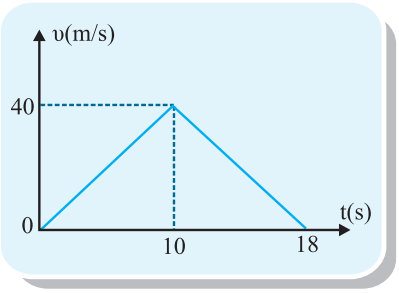
$(4) \Rightarrow \Delta x_2 = 40\,m/s \cdot 8\,s - \frac{1}{2} \cdot 5\,m/s^2 \cdot 64\,s^2 \Rightarrow \Delta x_2 = 160\,m$

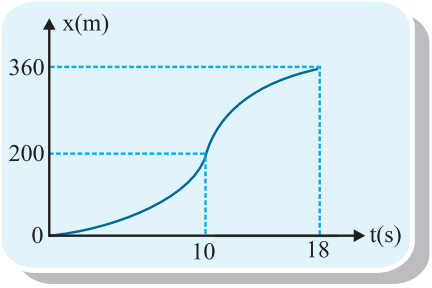
άρα $\Delta x_{ολ} = \Delta x_1 + \Delta x_2 \Rightarrow \Delta x_{ολ} = 360\,m$

γ. $\upsilon_{μ} = \frac{\Delta x_{ολ}}{\Delta t_{ολ}} = \frac{360\,m}{18\,s} \Rightarrow \upsilon_{μ} = 20\,m/s$

δ.







5. Σώμα που κινείται ευθύγραμμα με σταθερή επιτάχυνση $\alpha = 10\,m/s^2$, τη χρονική στιγμή $t = 0$ έχει ταχύτητα $\upsilon_0 = 20\,m/s$. Να βρείτε στη διάρκεια ποιου δευτερολέπτου έχει μετατοπιστεί κατά $\Delta x = 85\,m$.

Λύση:

Η θέση του σώματος τη χρονική στιγμή t είναι: $x_t = \upsilon_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \quad (1)$

Μετά από 1s, τη χρονική στιγμή $t+1$ είναι: $x_{t+1} = \upsilon_0 (t+1) + \frac{1}{2}\alpha (t+1)^2 \quad (2)$

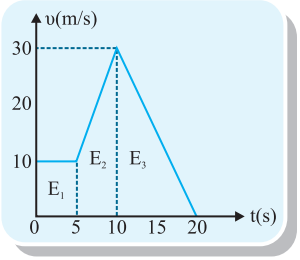
Άρα $\Delta x = x_{t+1} - x_t \xrightarrow[(2)]{(1)} \Delta x = \upsilon_0 (t+1) + \frac{1}{2}\alpha (t+1)^2 - \upsilon_0 t - \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow$

$$\Delta x = \upsilon_0 t + \upsilon_0 + \frac{1}{2}\alpha\left(t^2 + 2t + 1\right) - \upsilon_0 t - \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow$$

$$85 = 20 + \frac{1}{2} \cdot 10\left(t^2 + 2t + 1\right) - \frac{1}{2} \cdot 10t^2 \Rightarrow 85 = 20 + 5t^2 + 10t + 5 - 5t^2 \Rightarrow t = 6s$$

και $t + 1 = 7s$. Άρα κατά τη διάρκεια του 7ου δευτερολέπτου.

6. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η ταχύτητα ενός κινητού σε συνάρτηση με το χρόνο.
α. Να προσδιοριστούν οι κινήσεις.
β. Να βρεθεί η επιτάχυνση και η μετατόπιση σε κάθε κίνηση.
γ. Να γίνουν τα διαγράμματα α-t, x-t.



Λύση:

α. $(0-5)s:$ ευθύγραμμη ομαλή γιατί $\upsilon = \sigma\tau\alpha\theta.$

$(5-10)s:$ ευθύγραμμη ομαλά επιταχ. με αρχική ταχύτητα 10m/s και τελική 30m/s.

$(10-20)s:$ ευθύγραμμη ομαλά επιβραδ. με αρχική ταχύτητα 30m/s και τελική 0m/s.

β. $(0-5)s: \alpha_1 = \dfrac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \dfrac{10m/s - 10m/s}{5s - 0s} = 0\,m/s^2$

$(5-10)s: \alpha_2 = \dfrac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \dfrac{30m/s - 10m/s}{10s - 5s} = \dfrac{20m/s}{5s} = 4\,m/s^2$

$(10-20)s: \alpha_3 = \dfrac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \dfrac{0m/s - 30m/s}{20s - 10s} = \dfrac{-30m/s}{10s} = -3\,m/s^2$

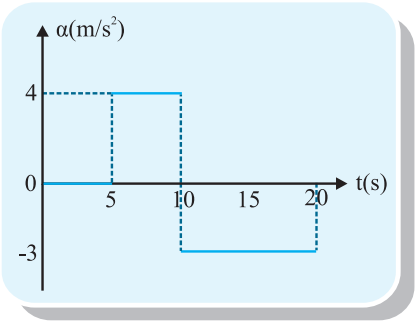
από υ-t υπολογίζω τη μετατόπιση απ' το εμβαδόν άρα:

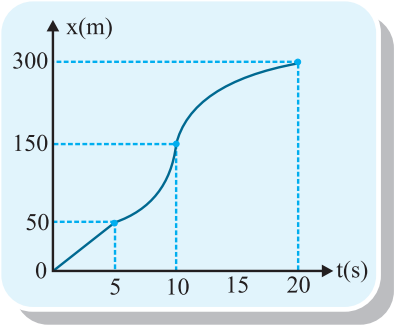
$(0-5)s: \Delta x_1 \overset{\alpha\rho}{=} E_1 \Rightarrow \Delta x_1 = 50\,m$

$(5-10)s: \Delta x_2 \overset{\alpha\rho}{=} E_2 \Rightarrow \Delta x_2 = \dfrac{(10+30)m/s}{2} \cdot 5s \Rightarrow \Delta x_2 = 100\,m$

$(10-20)s: \Delta x_3 \overset{\alpha\rho}{=} E_3 \Rightarrow \Delta x_3 = \dfrac{1}{2} \cdot 10m/s \cdot 30s = 150\,m$

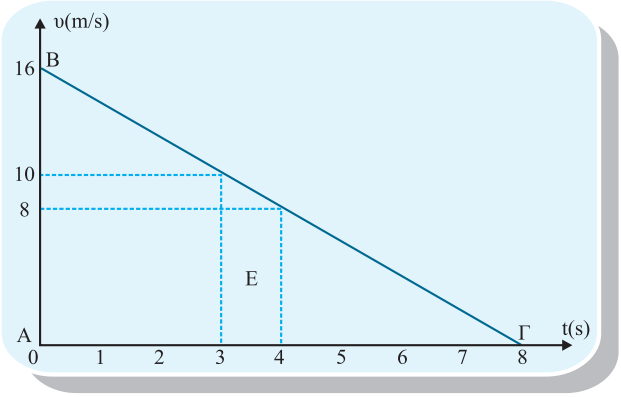
γ.





7. Κινητό έχει σταθερή ταχύτητα υ_0 και αρχίζει να επιβραδύνεται με σταθερή επιβράδυνση $\alpha = 2\,m/s^2$ και ακινητοποιείται μετά από χρονικό διάστημα $\Delta t = 8\,s$. Να γίνει το διάγραμμα υ-t και να υπολογιστούν:
α. η μετατόπιση του κατά τη διάρκεια του 4ου δευτερολέπτου
β. η συνολική του μετατόπιση

Λύση:



Επειδή κάνει ομαλά επιβραδυνόμενη ισχύει:

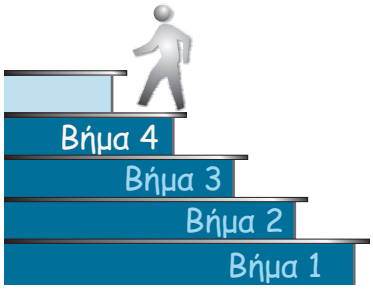
$$\upsilon = \upsilon_0 - \alpha \cdot \Delta t \xrightarrow{\upsilon=0} 0 = \upsilon_0 - \alpha \cdot \Delta t \Rightarrow \upsilon_0 = \alpha \cdot \Delta t \Rightarrow \upsilon_0 = 16\,m/s$$

α. Η διάρκεια του 4ου s μετριέται απ' τη χρονική στιγμή $t = 3s$ έως $t = 4s$. Οι ταχύτητες για τις αντίστοιχες χρονικές στιγμές είναι:

$$\upsilon_3 = \upsilon_0 - \alpha \cdot \Delta t_3 \Rightarrow \upsilon_3 = 10\,m/s \text{ και } \upsilon_4 = \upsilon_0 - \alpha \cdot \Delta t_4 \Rightarrow \upsilon_4 = 8\,m/s$$

Για να βρώ τη μετατόπισή του στη διάρκεια του 4ου s υπολογίζω το εμβαδόν Ε απ' το διάγραμμα υ-t: $\Delta x \overset{\alpha\rho}{=} E \Rightarrow \Delta x = \dfrac{(8+10)\,m/s}{2} \cdot 1s \Rightarrow \Delta x = 9\,m$

β. Η ολική μετατόπιση $\Delta x_{ολ} \overset{\alpha\rho}{=} E_{ABΓ} \Rightarrow \Delta x_{ολ} = \dfrac{1}{2} \cdot 8\,m/s \cdot 16s \Rightarrow \Delta x_{ολ} = 64\,m$

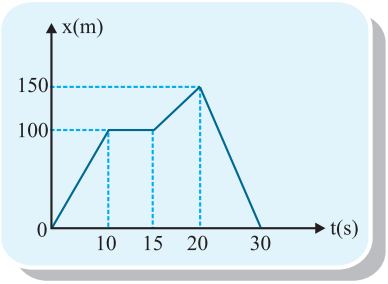


Λύνουμε μόνοι μας

1. Δίνεται το διάγραμμα θέσεως - χρόνου για ένα κινητό. Να βρεθούν:

α. η συνολική μετατόπιση

β. να γίνει το διάγραμμα υ-t.



2. Ένα σώμα έχει αρχική ταχύτητα $\upsilon_0 = 20\,m/s$ και επιταχύνεται με σταθερή επιτάχυνση. Μετά από χρονικό διάστημα Δt, έχει αποκτήσει ταχύτητα $\upsilon = 40\,m/s$ και έχει διανύσει διάστημα 120m. Να βρεθούν:

α. ο χρόνος κίνησης

β. η επιτάχυνση

γ. Να γίνουν τα διαγράμματα α-t, υ-t, x-t.

Δίνεται $t_0 = 0$, $x_0 = 0$

3. Ένα σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα $\upsilon_0 = 40\,m/s$ και επιβράδυνση $\alpha = 10\,m/s^2$.

α. Σε πόσο χρόνο η ταχύτητά του θα έχει ελαττωθεί στο μισό της αρχικής και πόσο θα έχει μετατοπισθεί μέχρι τότε;

β. Ποιος είναι ο ολικός χρόνος κίνησής του και ποια η ολική του μετατόπιση μέχρι να σταματήσει;

γ. Να γίνουν τα διαγράμματα α-t, υ-t, x-t αν $t_0 = 0$, $x_0 = 0$.

4. Κινητό ξεκινάει απ' την ηρεμία και κινείται με σταθερή επιτάχυνση $\alpha_1 = 4\,m/s^2$ για χρόνο $\Delta t_1 = 10\,s$. Στη συνέχεια κινείται ευθύγραμμα ομαλά για χρόνο $\Delta t_2 = 10\,s$. Συνεχίζει με επιβραδυνόμενη κίνηση με σταθερή επιβράδυνση $\alpha_3 = 2\,m/s^2$ μέχρις ότου μηδενιστεί η ταχύτητά του. Να βρεθούν:

α. η αρχική ταχύτητα της επιβραδυνόμενης κίνησης και η χρονική διάρκεια της επιβραδυνόμενης κίνησης

β. ο ολικός χρόνος κίνησης και η συνολική μετατόπιση

γ. να γίνουν τα διαγράμματα α-t, υ-t, x-t.

5. Σώμα που αρχικά ηρεμεί, κάνει επιταχυνόμενη κίνηση με σταθερή επιτάχυνση $\alpha_1 = 2\,m/s^2$ μέχρις ότου η ταχύτητά του γίνει $\upsilon_1 = 20\,m/s$. Στη συνέχεια κινείται με σταθερή ταχύτητα και μετά από χρονικό διάστημα Δt_2 επιβραδύνεται με σταθερή επιβράδυνση $\alpha_2 = 4\,m/s^2$ μέχρις ότου σταματήσει. Αν η συνολική του μετατόπιση είναι $\Delta x_{ολ} = 200\,m$ να βρεθούν:

α. η χρονική διάρκεια της επιταχυνόμενης και της επιβραδυνόμενης κίνησης

β. η μετατόπιση του σώματος κατά τη διάρκεια της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης

γ. να γίνουν τα διαγράμματα α-t, υ-t, x-t.

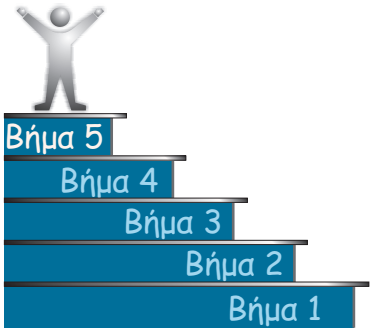
6. Δύο κινητά Α και Β περνούν ταυτόχρονα απ' το ίδιο σημείο με ταχύτητες $\upsilon_{OA} = 8\,m/s$ και $\upsilon_B = 20\,m/s$ με ίδια κατεύθυνση. Το Α επιταχύνεται με σταθερή επιτάχυνση $\alpha = 2\,m/s^2$ ενώ το Β κινείται ισοταχώς με ταχύτητα $\upsilon_B = σταθ.$ Να βρεθούν:

α. πότε και που θα ξανασυναντηθούν

β. ποια χρονική στιγμή έχουν την ίδια ταχύτητα

γ. να γίνει κοινό διάγραμμα υ-t.

7. Δύο ποδήλατα ξεκινούν, ταυτόχρονα, τη χρονική στιγμή $t = 0$ από δύο σημεία Α και Β μιας ευθύγραμμης πορείας κινούμενα αντίθετα. Ο ποδηλάτης που βρίσκεται στο σημείο Α αναπτύσσει επιτάχυνση $\alpha_1 = 6\,m/s^2$ και ο ποδηλάτης που βρίσκεται στο σημείο Β $\alpha_2 = 4\,m/s^2$. Αν η απόσταση ΑΒ είναι 80m να βρείτε πότε θα συναντηθούν και σε πόση απόσταση απ' το Α.



Ελέγχουμε τις γνώσεις μας

Θέμα 1ο

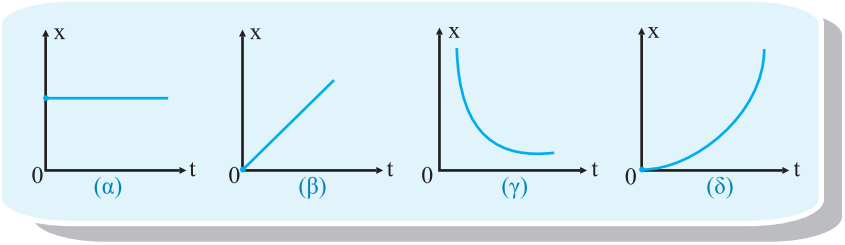
Α. Ένα κινητό εκτελεί τρεις πλήρεις, παλινδρομικές κινήσεις ανάμεσα στα σημεία Α και Β που απέχουν μεταξύ τους 5m. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές (Σ) και ποιες λάθος (Λ).

α. Η μετατόπιση είναι ίση με μηδέν. ( )
β. Το διάστημα είναι ίσο με μηδέν. ( )
γ. Η μετατόπιση είναι ίση με 30m. ( )
δ. Η μετατόπιση είναι ίση με 15m. ( )
ε. Το διάστημα είναι ίσο με 30m. ( )

Β. Μια κίνηση χαρακτηρίζεται ως ευθύγραμμη ομαλή όταν:

α. Το διάνυσμα της ταχύτητας είναι σταθερό. ( )
β. Το διάνυσμα της επιτάχυνσης είναι σταθερό. ( )
γ. Το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό. ( )
δ. Το μέτρο της επιτάχυνσης είναι σταθερό. ( )

Γ. Ποια είναι η γραφική παράσταση μετατόπισης - χρόνου $x = f(t)$ στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.



Δ. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της αριστερής με αυτά της δεξιάς στήλης $(\alpha > 0)$.

α. $\upsilon = \upsilon_0 + \alpha t$	**1.** ευθύγραμμη ομαλή κίνηση
β. $x = \frac{1}{2}\alpha t^2$	**2.** ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση
γ. $x = \upsilon \cdot t$	**3.** ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση
δ. $x = \upsilon_0 t - \frac{1}{2}\alpha t^2$	
ε. $\upsilon = \upsilon_0 - \alpha t$	

Ε. Χαρακτηρίστε με (Σ) τις σωστές προτάσεις και με (Λ) τις λανθασμένες.

α. Η κλίση της ευθείας στο διάγραμμα $\upsilon(t)$ είναι η μετατόπιση. ( )

β. Τα διανύσματα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης έχουν την ίδια κατεύθυνση σε κάθε ευθύγραμμη κίνηση. ( )

γ. Η μέση ταχύτητα είναι μονόμετρο μέγεθος. ( )

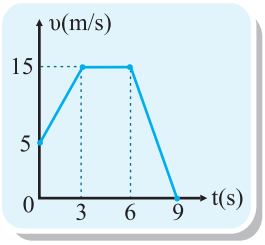
δ. Το διάστημα ταυτίζεται πάντα με την μετατόπιση. ( )

ε. Η έκφραση $1m/s^2$ δηλώνει ότι η ταχύτητα του κινητού μεταβάλλεται κατά 1m/s κάθε δευτερόλεπτο. ( )

Θέμα 2ο

α. Να υπολογίσετε την εξίσωση της κίνησης στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα.

β.



I. Ποια είναι η επιτάχυνση τις χρονικές στιγμές:

i. $t_1 = 2,5s$: $\alpha_1 =$

ii. $t_2 = 4s$: $\alpha_2 =$

iii. $t_3 = 7,2s$: $\alpha_3 =$

ΙΙ. Χαρακτηρίστε με (Σ) τις σωστές προτάσεις και με (Λ) τις λανθασμένες.

i. Η επιτάχυνση είναι μηδέν.

ii. Η ταχύτητα είναι σταθερή.

iii. Η επιτάχυνση είναι $13 m/s^2$.

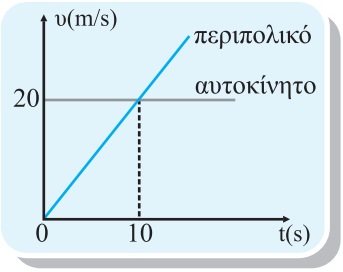
ΙΙΙ. Την χρονική στιγμή $t_1 = 1,5s$ η ταχύτητα είναι:

i. 7,5 m/s **ii.** 9 m/s **iii.** 12 m/s

γ. Ποια μονάδα είναι μεγαλύτερη, το 1m/s ή το 1 km/h;

Θέμα 3ο

Ένα αυτοκίνητο κινείται ευθύγραμμα ομαλά. Ένα ακίνητο περιπολικό, μόλις περνά το αυτοκίνητο από μπροστά του, αρχίζει να το καταδιώκει με σταθερή επιτάχυνση. Στο κοινό διάγραμμα υ(t) είναι σχεδιασμένες οι γραφικές παραστάσεις των ταχυτήτων τους σε σχέση με τον χρόνο.



α. Σε πόσο χρόνο αποκτούν κοινή ταχύτητα;

β. Σε πόσο χρόνο το περιπολικό φθάνει το αυτοκίνητο;

γ. Πόση μετατόπιση έχουν διανύσει;

δ. Ποια είναι η ταχύτητα του περιπολικού;

Θέμα 4ο

Ο Ολυμπιονίκης του Sidney Κώστας Κεντέρης προετοιμαζόμενος για τους Ολυμπιακούς αγώνες στην Αθήνα, σχεδιάζει τον τελικό των 200m. Υπολογίζει ότι με χρόνο κάτω από 20,45s θα κατακτήσει το χρυσό. Η μέγιστη ταχύτητά του είναι 10m/s. Αν στην αρχή επιταχύνει ομαλά μέχρι να αποκτήσει την μέγιστη ταχύτητα, στη συνέχεια κινηθεί με την σταθερή αυτή ταχύτητα για 172m, ενώ στο τέλος επιβραδύνει ομαλά, λόγω κούρασης, με επιβράδυνση $2 m/s^2$ και τελικά πέσει στο νήμα με ταχύτητα 8m/s. Θα πετύχει τον στόχο του, σύμφωνα με τους υπολογισμούς του;

Κεφάλαιο 2ο

Δυναμική σε μία διάσταση

Ο μαθητής που έχει μελετήσει το κεφάλαιο δυναμική σε μία διάσταση πρέπει:

- ✓ Να γνωρίζει την έννοια της δύναμης.
- ✓ Να μπορεί να συνθέσει δύο ή περισσότερες συγγραμμικές δυνάμεις.
- ✓ Να διατυπώνει τον 1ο Νόμο του Νεύτωνα.
- ✓ Να γνωρίζει την έννοια της παραμόρφωσης και τα είδη της.
- ✓ Να διατυπώνει τον νόμο του Hooke.
- ✓ Να γνωρίζει τι είναι αδράνεια και τι αδρανειακή μάζα.
- ✓ Να γνωρίζει τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα.
- ✓ Να μπορεί να κάνει διερεύνηση της σχέσης $\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha}$ (2ου Νόμου).
- ✓ Να γνωρίζει τι λέγεται βάρος σώματος στη γη.
- ✓ Να δίνει τον ορισμό της ελεύθερης πτώσης, να γνωρίζει τις εξισώσεις της ελεύθερης πτώσης, της αποδείξεις της και τα διαγράμματά της.
- ✓ Να ξέρει ποιοι παράγοντες καθορίζουν την τιμή της επιτάχυνσης της βαρύτητας.
- ✓ Να μπορεί να υπολογίσει τη συνισταμένη συγγραμμικών δυνάμεων.
- ✓ Να είναι σε θέση να καταλήξει σε συμπεράσματα για την συνισταμμένη δύναμη εάν το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση ή είναι ακίνητο ή όταν εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή μεταβαλλόμενη κίνηση.
- ✓ Να μπορεί από τα διαγράμματα F(t) και την αρχική κατάσταση του σώματος να συμπεραίνει τι κίνηση κάνει.

Τυπολόγιο 2ου κεφαλαίου

Δυναμική σε μία διάσταση		
Συνισταμένη δύο δυνάμεων που έχουν ίδια κατεύθυνση		$F = F_1 + F_2$
Συνισταμένη δύο δυνάμεων που έχουν αντίθετη κατεύθυνση		$F = \lvert F_1 - F_2 \rvert$
2ος Νόμος Νεύτωνα $\Sigma\vec{F} = m \cdot \vec{\alpha}$		
Διερεύνηση:	**α.** Αν $\Sigma\vec{F} = 0$ τότε $\vec{\upsilon} = 0$ ή $\vec{\upsilon} = \sigma\tau\alpha\theta\left(x = \upsilon \cdot t\right)$	
	β. Αν $\Sigma\vec{F} = \sigma\tau\alpha\theta$ τότε $\vec{\alpha} = \sigma\tau\alpha\theta \begin{pmatrix} \upsilon = \upsilon_0 \pm \alpha t \\ x = \upsilon_0 t \pm \frac{1}{2}\alpha t^2 \end{pmatrix}$	
	γ. Αν $\Sigma\vec{F} = \mu\varepsilon\tau\alpha\beta\lambda$ τότε $\vec{\alpha} = \mu\varepsilon\tau\alpha\beta\lambda$	
Βάρος: $\vec{B} = m \cdot \vec{g}$	Αδρανειακή μάζα: $m = \frac{\Sigma F}{\alpha}$,	
	Βαρυτική μάζα: $m = \frac{B}{g}$	
Ελεύθερη πτώση: $\vec{\alpha} = \vec{g}$	$\upsilon = g \cdot t$	$s = \frac{1}{2} g t^2$

Δυναμική σε μία διάσταση: Τύποι - Βασικές έννοιες

Τι λέγεται δύναμη;

Δύναμη ονομάζεται η αιτία που μπορεί να παραμορφώσει ένα σώμα ή να μεταβάλλει την κινητική του κατάσταση.

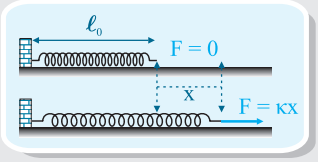
Η δύναμη είναι διανυσματικό μέγεθος. Τα χαρακτηριστικά της δύναμης είναι το μέτρο της, η κατεύθυνση της (διεύθυνση και φορά) και το σημείο εφαρμογής της. Μονάδα μέτρησης της δύναμης είναι το $1N = 1kg \cdot m/s^2$.

Ποια παραμόρφωση λέγεται ελαστική και ποια πλαστική;

Ελαστική λέγεται η παραμόρφωση σώματος όταν το σώμα επανέρχεται στην αρχική του κατάσταση μόλις πάψει να ασκείται η δύναμη που είχε προκαλέσει την παραμόρφωση.

Πλαστική λέγεται η παραμόρφωση που διατηρείται και μετά την παύση της δύναμης.

Διατυπώστε το νόμο του Hooke.



Ο Νόμος Hooke για τις ελαστικές παραμορφώσεις
Οι ελαστικές παραμορφώσεις είναι ανάλογες των δυνάμεων που τις προκαλούν.

$$F = \kappa \cdot x$$

x: η παραμόρφωση του ελατηρίου σε σχέση με το φυσικό του μήκος κ: η σταθερά του ελατηρίου που εκφράζει τη σκληρότητα του και μετριέται σε N/m.

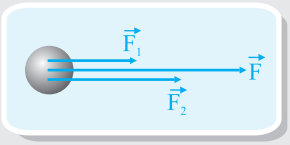
Πώς συνθέτουμε συγγραμμικές δυνάμεις; Τι λέγεται συνισταμένη;

Συνισταμένη δύο ή περισσοτέρων δυνάμεων ονομάζεται ή δύναμη που τις αντικαθιστά και επιφέρει στο ίδιο σώμα το ίδιο αποτέλεσμα μ' αυτές. Οι επιμέρους δυνάμεις λέγονται συνιστώσες. Η διαδικασία εύρεσης της συνισταμένης λέγεται σύνθεση.
Διανυσματικά γράφουμε πάντα:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots \vec{F}_\nu$$

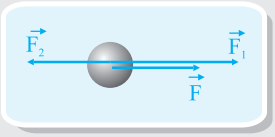
Υπολογισμός συνισταμένης

1. Δύο δυνάμεων ίδιας κατεύθυνσης (ομόρροπες)



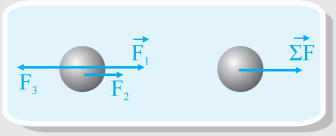
Ισχύει: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ και $F = F_1 + F_2$
Η συνισταμένη έχει την ίδια κατεύθυνση με τις συνιστώσες και μέτρο το άθροισμα των μέτρων τους.

2. Δύο δυνάμεις αντίθετης κατεύθυνσης (αντίρροπες)



Ισχύει: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ και $F = |F_1 - F_2|$
Η συνισταμένη έχει την κατεύθυνση της μεγαλύτερης και μέτρο την διαφορά των μέτρων των συνιστωσών.

3. Τρεις ή περισσότερες δυνάμεις.



Ισχύει: $\Sigma\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$

- Επιλέγουμε αυθαίρετα μια φορά σαν θετική
- Όσες δυνάμεις έχουν την θετική φορά λαμβάνονται με θετική αλγεβρική τιμή και όσες έχουν την αρνητική φορά λαμβάνονται με αρνητική αλγεβρική τιμή.
- Προσθέτουμε τις αλγεβρικές τιμές των δυνάμεων. Αν η συνισταμένη προκύψει θετική θα έχει τη θετική φορά. Αν όχι την αρνητική.

Διατυπώστε τον 1ο Νόμο του Νεύτωνα.

Αν η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα είναι μηδέν τότε το σώμα ισορροπεί δηλαδή ηρεμεί ή κινείται ευθύγραμμα και ομαλά.

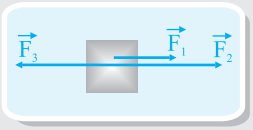
Ισχύει: Αν $\Sigma\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... = \vec{0}$ τότε $\vec{\upsilon} = 0$ ή $\vec{\upsilon} =$ σταθερή

Για δύο δυνάμεις: $\Sigma\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$

$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_1 - F_2 = 0 \Rightarrow F_1 = F_2$ (μέτρα)

Για τρείς δυνάμεις: $\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0 \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\vec{F}_3$

$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_1 + F_2 - F_3 = 0 \Rightarrow F_1 + F_2 = F_3$



Τι λέγεται αδράνεια;

Αδράνεια ονομάζεται η ιδιότητα των σωμάτων να τείνουν να διατηρούν την κινητική τους κατάσταση.

Ορισμός της αδρανειακής μάζας.

Μέτρο της αδράνειας των σωμάτων είναι η αδρανειακή μάζα $m = \frac{F}{\alpha}$

Όταν η συνισταμένη δύναμη είναι διάφορη του μηδενός τότε η αδράνεια των σωμάτων εκδηλώνεται σαν αντίσταση στην αιτία που μεταβάλλει την κινητική κατάσταση. Παρά την αδράνεια πάντως η κινητική κατάσταση θα μεταβληθεί.

Διατυπώστε το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής ή το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα.

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha} \quad \text{ή} \quad \vec{\alpha} = \frac{\Sigma\vec{F}}{m}$$

- **Η επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ έχει την κατεύθυνση της συνισταμένης δύναμης**
- **Η επιτάχυνση α είναι ανάλογη της δύναμης για την ίδια μάζα και αντιστρόφως ανάλογη της μάζας για την ίδια δύναμη.**

Δώστε τον ορισμό του βάρος του σώματος στη γή.

Βάρος σώματος στη Γη, ονομάζεται η δύναμη που δέχεται το σώμα από τη Γή.

$\vec{B} = m\vec{g}$ όπου m η βαρυτική μάζα του σώματος $m = \frac{B}{g}$

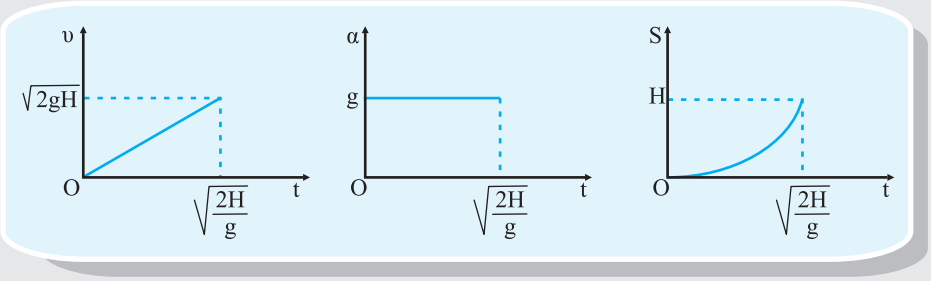
Αδρανειακή και βαρυτική μάζα πειραματικά διαπιστώθηκε ότι είναι ίσες.

Ποια κίνηση λέγεται ελεύθερη πτώση;

Η κίνηση που εκτελεί ένα σώμα όταν αφήνεται να κινηθεί χωρίς αρχική ταχύτητα από κάποιο ύψος με την επίδραση μόνο του βάρους του. Το βάρος λαμβάνεται σταθερό και οι αντιστάσεις αέρα αμελητέες.

Ποια είναι τα διαγράμματα υ-t, α-t, s-t στην ελεύθερη πτώση;

Διαγράμματα στην ελεύθερη πτώση

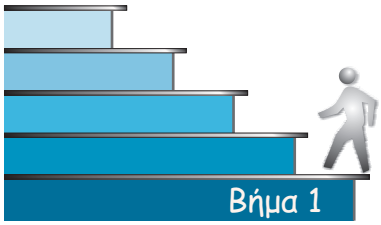


Ποιοι είναι οι παράγοντες που καθορίζουν την τιμή της επιτάχυνσης της βαρύτητας;

- Γεωγραφικό πλάτος

  Η επιτάχυνση της βαρύτητας αυξάνεται από τον ισημερινό $\left(g = 9,78\,m/s^2\right)$ προς τους πόλους $\left(g = 9,83\,m/s^2\right)$.

- Ύψος h πάνω από την επιφάνεια της Γης.
  Μειώνεται με την αύξηση του ύψους



Μαθαίνουμε τις αποδείξεις

Απόδειξη 1

Να διερευνηθεί η σχέση $\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha}$ (2ος Νόμος του Νεύτωνα).

1. Αν $\Sigma\vec{F} = 0$ τότε $\vec{\alpha} = 0$. Το σώμα ηρεμεί ή κινείται με σταθερή ταχύτητα. (1ος ΝΟΜΟΣ ΝΕΥΤΩΝΑ).

2. Αν $\Sigma\vec{F} =$ σταθερή τότε $\vec{\alpha} =$ σταθερή.

Αν $\Sigma\vec{F}$ και $\vec{\upsilon}$ έχουν την ίδια κατεύθυνση (ομόρροπες) τότε η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη.

Αν $\Sigma\vec{F}$ και $\vec{\upsilon}$ έχουν αντίθετη κατεύθυνση (αντίρροπες) τότε η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη.

3. Αν $\Sigma\vec{F} \neq$ σταθερή τότε $\vec{\alpha} \neq$ σταθερή. Κίνηση με μεταβαλλόμενη επιτάχυνση.

Απόδειξη 2

Τι ισχύει για την επιτάχυνση του σώματος στην ελεύθερη πτώση.

Ισχύει: $\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha} \Rightarrow \vec{B} = m\vec{\alpha} \Rightarrow m\vec{g} = m\vec{\alpha} \Rightarrow \vec{g} = \vec{\alpha}$

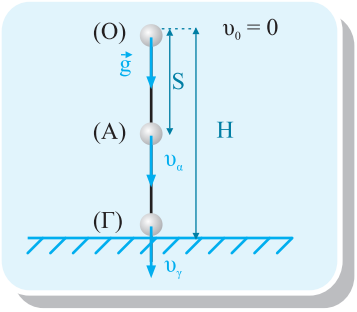
Αν και τα σώματα έχουν διαφορετικό βάρος (λόγω της διαφορετικής μάζας τους) πέφτουν όλα με την ίδια επιτάχυνση την επιτάχυνση της βαρύτητας $\vec{g}$.

Απόδειξη 3

Ποιες είναι οι εξισώσεις ταχύτητας και διαστήματος στην ελεύθερη πτώση;

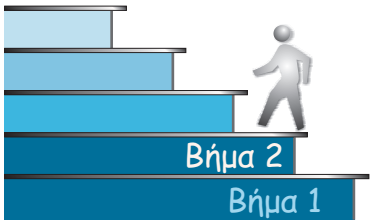
$$\left.\begin{array}{l}\upsilon = \alpha \cdot t \\ \alpha = g\end{array}\right\} \Rightarrow \upsilon = g \cdot t \qquad \left.\begin{array}{l}s = \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2 \\ \alpha = g\end{array}\right\} \Rightarrow s = \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$\left.\begin{array}{l}\upsilon = g \cdot t \\ s = \frac{1}{2} g \cdot t^2\end{array}\right\} \text{Τυχαία θέση } (A)$$



Όταν φτάνει στο έδαφος ισχύει:

$$H = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot H}{g}} \quad \text{και} \quad \upsilon = g \cdot t = \sqrt{2 \cdot g \cdot H}$$



Επαναλαμβάνουμε τις ασκήσεις “κλειδιά”

Α. Από το σχολικό βιβλίο ΦΥΣΙΚΗ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ έκδοση 2003.

σ.σ. 101 - 105: Ερωτήσεις 13, 15, 17, 18, 34, 37, 38, 41

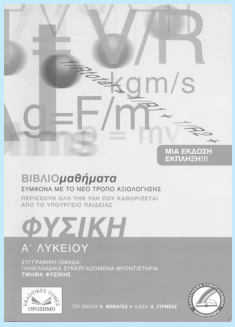
σ.σ. 107 - 108: Ασκήσεις 4, 5, 12, 13, 16, 18

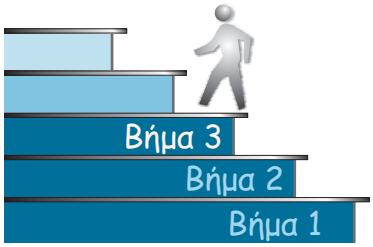
Β. Από τα Βιλιομαθήματα ΦΥΣΙΚΗ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ εκδόσεις “ΟΡΟΣΗΜΟ”

σ.σ. 49 - 50: Ερωτήσεις 4, 5, 6, 7, 9, 11

σ.σ. 51 - 54: Ασκήσεις 5, 7, 10, 12, 20, 21

σ.σ. 55 - 56: Ξεχωριστό θέμα





Λύνουμε περισσότερες ασκήσεις

1. Σώμα μάζας $m = 2kg$ κινείται σε οριζόντιο επίπεδο με αρχική ταχύτητα μέτρου 10m/s. Ξαφνικά ασκούμε στο σώμα οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 10N$. Ποια είναι η ταχύτητα του σώματος 20s μετά την άσκηση της δύναμης αν:
α. η δύναμη έχει την ίδια φορά με την ταχύτητα
β. η δύναμη έχει αντίθετη φορά με την ταχύτητα

Λύση:

α. Από το θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής έχουμε:

$F = m \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{F}{m} = \frac{10N}{2kg} = 5m/s^2$. Άρα κάνει ευθ. ομαλά επιταχ. κίνηση.

Η ταχύτητά του είναι: $\upsilon = \upsilon_0 + \alpha \cdot t = 10m/s + 5m/s^2 \cdot 20s = 110m/s$

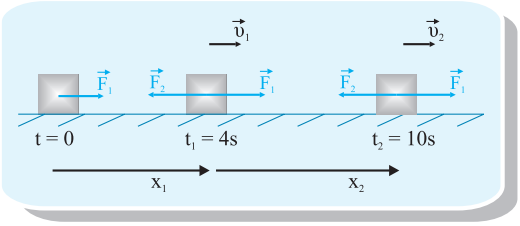
β. Από το θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής έχουμε:

$-F = m \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{-F}{m} = \frac{-10N}{2kg} = -5m/s^2$. (γιατί ορίσαμε ως θετική φορά προς τα δεξιά). Άρα κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση και η ταχύτητά του θα είναι: $\upsilon = \upsilon_0 + \alpha \cdot t = 10m/s - 5m/s^2 \cdot 20s = -90m/s$

Δηλαδή το σώμα θα κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα μέτρου 90m/s.

2. Σώμα μάζας $m = 2kg$ ηρεμεί σε οριζόντιο δάπεδο. Στο σώμα ασκούμε με σταθερή οριζόντια δύναμη $F_1 = 20N$ για χρόνο 4s. Στη συνέχεια και για τα επόμενα 6s ασκούμε και άλλη δύναμη F_2 σταθερού μέτρου και αντίθετης κατεύθυνσης από την F_1, οπότε το σώμα αποκτά ταχύτητα μέτρου 70m/s. Να βρείτε το μέτρο της F_2 και το ολικό διάστημα που διανύει το σώμα.

Λύση:



Για την κίνηση από $0-4s$, το σώμα κάνει ευθύγραμμη ομαλή επιταχυνόμενη κίνηση. Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής έχουμε:

$F_1 = m \cdot \alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{F_1}{m_1} = \frac{20N}{2kg} = 10\,m/s^2$ είναι: $\upsilon_1 = \alpha_1 \cdot t_1 = 10m/s^2 \cdot 4s = 40\,m/s$

και $x_1 = \frac{1}{2}\alpha_1 \cdot t_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 10m/s^2 \cdot 4^2 s^2 = 80\,m$.

Για την κίνηση $4-10s$ το σώμα συνεχίζει την κίνησή του. Η νέα επιτάχυνση α_2 είναι: $\upsilon_2 = \upsilon_1 + \alpha_2 \cdot t_2 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{t_2} = \frac{70m/s - 40m/s}{6s} = 5\,m/s^2$

Επομένως συνεχίζει την ευθύγραμμη ομαλή επιταχυνόμενη κίνηση.
Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής έχουμε: $\Sigma F = m \cdot \alpha_2 \Rightarrow \Sigma F = 10N$

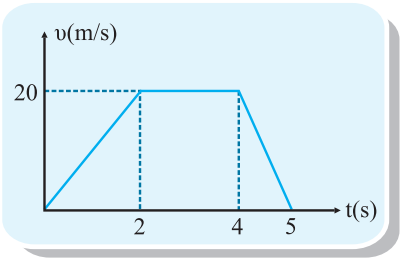
Η F_2 είναι αντίρροπη της F_1 ισχύει:

$\Sigma F = F_1 - F_2 \Rightarrow F_2 = F_1 - \Sigma F \Rightarrow F_2 = 20N - 10N \Rightarrow F_2 = 10N$

Το x_2 είναι: $x_2 = \upsilon_1 \cdot t_2 + \frac{1}{2}\alpha_2 \cdot t_2^2 \Rightarrow x_2 = 40m/s \cdot 6s + \frac{1}{2} \cdot 5m/s^2 \cdot 6^2 s^2 = 330\,m$

Άρα το ολικό διάστημα θα είναι: $x_{ολ} = x_1 + x_2 = 80m + 330m = 410\,m$

3. Η ταχύτητα σώματος μεταβάλλεται σύμφωνα με το διάγραμμα. Αν το σώμα έχει μάζα $m = 2kg$ για $t = 0$, $x_0 = 0$ να γίνει το διάγραμμα x-t και F-t .



Λύση:

Θα μελετήσουμε το διάγραμμα κατά χρονικά διαστήματα.

Από 0 – 2s: Ευθύγραμμη Ομαλά Επιταχυνόμενη Κίνηση

$$\alpha_1 = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{20m/s - 0m/s}{2s - 0s} = 10\,m/s^2 \text{ και } F_1 = m \cdot \alpha_1 = 2kg \cdot 10m/s^2 = 20N$$

$$x_1 \overset{\alpha\rho}{=} E_{\mu\beta(\tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon)} \Rightarrow x_1 = \frac{2s \cdot 20m/s}{2} = 20\,m$$

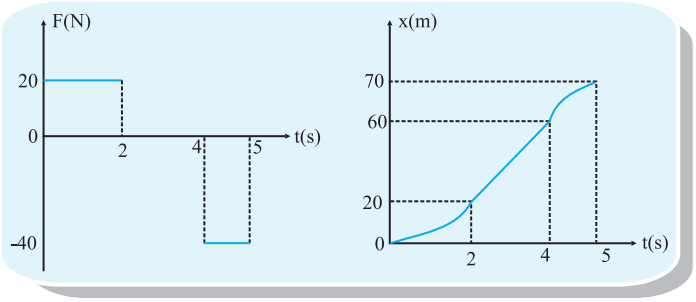
Από 2 – 4s: Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση

$$\alpha_2 = 0\,,\ F_2 = 0 \text{ και } x_2 \overset{\alpha\rho}{=} E_{(o\rho\theta.)} \Rightarrow x_2 = 20m/s(4s - 2s) = 40\,m$$

Από 4 – 5s: Ευθύγραμμη Ομαλή Επιβραδυνόμενη Κίνηση

$$\alpha_3 = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{0m/s - 20m/s}{5s - 4s} = -20\,m/s^2 \text{ και } F_3 = m \cdot \alpha_3 = 2kg \cdot \left(-20m/s^2\right) = -40N$$

$$x_3 \overset{\alpha\rho}{=} E_{(\tau\rho\iota\gamma)} \Rightarrow x_3 = \frac{20m/s \cdot (5s - 4s)}{2} = 10\,m$$



4. Δύο σώματα με μάζες $m_1 = 10kg$ και $m_2 = 20kg$ βρίσκονται στο ίδιο λείο οριζόντιο επίπεδο δίπλα - δίπλα. Στο m_1 ενεργεί δύναμη $F_1 = 100N$ ενώ στο m_2 δύναμη $F_2 = 400N$ ομόρροπη στην F_1. Να βρείτε τις ταχύτητές τους όταν απέχουν 125m.

Λύση:

$$F_1 = m_1 \cdot \alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{F_1}{m_1} = 10\,m/s^2 \text{ και } F_2 = m_2 \cdot \alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{F_2}{m_2} = 20\,m/s^2$$

Έχουμε: $\Delta x = x_2 - x_1 \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2}\alpha_2 \cdot t^2 - \frac{1}{2}\alpha_1 \cdot t^2 \Rightarrow$

$$125=\frac{1}{2}\cdot 20\cdot t^2-\frac{1}{2}\cdot 10\cdot t^2 \Rightarrow 125=10t^2-5t^2 \Rightarrow t=5s$$

Άρα $\upsilon_1=\alpha_1\cdot t=10m/s^2\cdot 5s=50m/s$ και $\upsilon_2=\alpha_2\cdot t=20m/s^2\cdot 5s=100m/s$.

5. Σε σώμα μάζας $m=0,03kg$, που κινείται ευθύγραμμα και ομαλά με ταχύτητα υ_0 ασκείται μια σταθερή δύναμη $F=0,6N$ με κατεύθυνση αντίθετη της ταχύτητας. Παρατηρούμε ότι το σώμα σταματάει μετά από χρόνο $t=5s$ από τη στιγμή που του ασκήθηκε η δύναμη. Να υπολογιστούν:

α. η αρχική ταχύτητα υ_0 του σώματος
β. πότε θα αλλάξει φορά η ταχύτητα
γ. σε ποια θέση θα συμβεί αυτό;

Λύση:

Το σώμα κάνει ευθύγραμμη ομαλή επιβραδυνόμενη κίνηση είναι:

$$F=m\cdot\alpha \Rightarrow \alpha=\frac{F}{m} \Rightarrow \alpha=\frac{0,6N}{0,03kg} \Rightarrow \alpha=20m/s$$

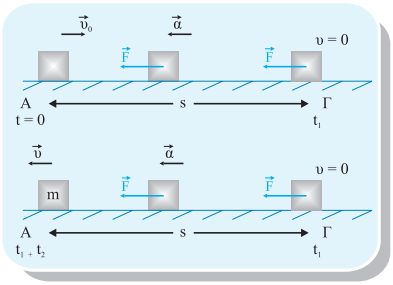
α. Αφού το σώμα σταματά είναι: $(\upsilon=0) \Rightarrow \upsilon=\upsilon_0-\alpha\cdot t \Rightarrow \upsilon_0=100m/s$

β. Η ταχύτητα του σώματος αλλάζει φορά στο σημείο που μηδενίζεται η ταχύτητα στο τέλος του χρόνου $t=5s$.

γ. Το διάστημα που διανύει το σώμα μέχρι να σταματήσει είναι:

$$\upsilon_\tau^2=\upsilon_0^2-2\alpha x \Rightarrow x=\frac{\upsilon^2-\upsilon_0^2}{2\alpha} \Rightarrow x=250m$$

6. Σώμα μάζας $m=1kg$ κινείται με σταθερή ταχύτητα υ_0 πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Ξαφνικά στο σώμα ασκείται σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F=0,2N$, που μετά από 16s το ξαναφέρνει στο σημείο που βρισκόταν τη στιγμή που άρχισε να ασκείται σε αυτό η δύναμη F. Να βρείτε την αρχική ταχύτητα υ_0 του σώματος.



Λύση:

$$F = m \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{F}{m} \Rightarrow \alpha = 0,2\,m/s^2$$

Από το $A \rightarrow \Gamma$: ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με υ_0 και $\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda} = 0$.

$$\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda} = \upsilon_0 - \alpha \cdot t_1 \Rightarrow 0 = \upsilon_0 - \alpha \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{\upsilon_0}{\alpha} \quad (1)$$

και $s = \upsilon_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2}\alpha \cdot t_1^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} s = \upsilon_0 \frac{\upsilon_0}{\alpha} - \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{\upsilon_0}{\alpha}\right)^2 \Rightarrow s = \frac{\upsilon_0^2}{2\alpha} \quad (2)$

Από το $\Gamma \rightarrow A$: ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα.

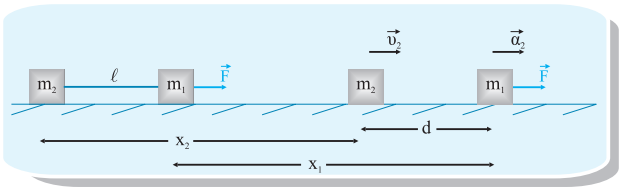
Είναι: $F = m \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = 0,2\,m/s^2$ και $s = \frac{1}{2}\alpha \cdot t_2^2 \quad (3)$

Από τις (2) και (3) $\Rightarrow \frac{\upsilon_0^2}{2\alpha} = \frac{1}{2}\alpha \cdot t_2^2 \Rightarrow t_2 = \frac{\upsilon_0}{\alpha}$

Όμως $t_1 = \frac{\upsilon_0}{\alpha}$ οπότε: $t_1 = t_2 = \frac{t_{o\lambda}}{2} = 8s$ και $\upsilon_0 = \alpha \cdot t_1 = 0,2\,m/s^2 \cdot 8s = 1,6\,m/s$

7. Πάνω σε ένα λείο οριζόντιο επίπεδο βρίσκονται δύο μάζες με $m_1 = 1kg$ και $m_2 = 3kg$ που ηρεμούν δεμένες στις άκρες ενός τεντωμένου σχοινιού χωρίς μάζα με μήκος $\ell = 4m$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ στη μάζα m_1 ασκείται σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 8N$. Αν τη χρονική στιγμή $t_1 = 3s$ το σχοινί σπάει, ενώ η δύναμη συνεχίζει να ασκείται στη μάζα m_1, να βρείτε την απόσταση μεταξύ των μαζών τη χρονική στιγμή $t_2 = 5s$.

Λύση:



Μέχρι τα 3s οι μάζες κινούνται μαζί με $F = m_{o\lambda} \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{F}{m_1 + m_2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = \frac{8N}{4kg} = 2\,m/s^2$ και ταχύτητα $\upsilon_1 = \upsilon_2 = \alpha \cdot t_1 \Rightarrow \upsilon_1 = \upsilon_2 = 6\,m/s$.

Μετά από $t_1 = 3s$ η m_1 κινείται με επιτάχυνση: $F = m_1 \cdot \alpha' \Rightarrow \alpha' = \frac{F}{m_1} = 8m/s^2$ και η m_2 συνεχίζει με σταθερή ταχύτητα υ_2. Ισχύει: $\Delta t = t_2 - t_1 \Rightarrow \Delta t = 2s$.

Οπότε έχουμε: $d + x_2 = \ell + x_1 \Rightarrow d = \ell + \upsilon_1 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot \alpha' \cdot \Delta t^2 - \upsilon_2 \cdot \Delta t \Rightarrow d = 20m$

8. Ένα σώμα εκτοξεύεται από ταράτσα πολυκατοικίας ύψους 25m προς τα πάνω με $\upsilon_0 = 20m/s$. Να βρείτε:
α. το χρόνο ανόδου και το μέγιστο ύψος από την ταράτσα
β. το χρόνο καθόδου και την ταχύτητα επιστροφής στο ύψος της ταράτσας
γ. την ταχύτητα στις χρονικές στιγμές $t_1 = 1s$, $t_2 = 3s$ και $t_3 = 5s$. Που βρίσκεται τότε το σώμα;
Δίνεται $g = 10m/s^2$.

Λύση:

α. $\upsilon = \upsilon_0 - g \cdot t_{\alpha\nu} \Rightarrow 0 = \upsilon_0 - g \cdot t_{\alpha\nu} \Rightarrow \upsilon_0 = g \cdot t_{\alpha\nu} \Rightarrow t_{\alpha\nu} = \frac{20m/s}{10m/s^2} \Rightarrow t_{\alpha\nu} = 2s$

$h_{max} = \upsilon_0 \cdot t_{\alpha\nu} - \frac{1}{2} g \cdot t_{\alpha\nu}^2 = 20m/s \cdot 2s - \frac{1}{2} \cdot 10m/s^2 \cdot 2^2 s^2 = 20m$

β. $t_{\kappa\alpha\theta} = t_{\alpha\nu} = 2s$ άρα $t_{o\lambda} = t_{\alpha\nu} + t_{\kappa\alpha\theta} = 4s$

$\upsilon_{\epsilon\pi\iota\sigma\tau\rho} = \upsilon_0 - g \cdot t_{o\lambda} = 20m/s - 10m/s^2 \cdot 4s = -20m/s$

γ. Για $t_1 = 1s$

$\upsilon_1 = \upsilon_0 - g \cdot t_{\alpha\nu} = 20m/s - 10m/s^2 \cdot 1s \Rightarrow \upsilon_1 = 10m/s$

$y_1 = \upsilon_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2} y \cdot t_1^2 = 20m/s \cdot 1s - \frac{1}{2} \cdot 10m/s^2 \cdot 1^2 s^2 \Rightarrow y_1 = 15m$

Για $t_2 = 3s$

$\upsilon_2 = \upsilon_0 - g \cdot t_2 = 20m/s - 10m/s^2 \cdot 3s \Rightarrow \upsilon_2 = -10m/s$ το σώμα κατέρχεται.

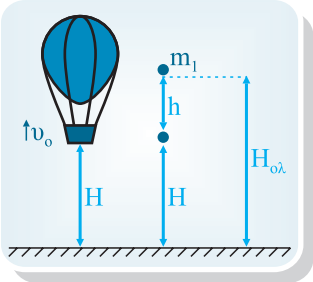
$y_2 = \upsilon_0 \cdot t_2 - \frac{1}{2} y \cdot t_2^2 = 20m/s \cdot 3s - \frac{1}{2} \cdot 10m/s^2 \cdot 3^2 s^2 \Rightarrow y_2 = 15m$

Για $t_3 = 5s$

$\upsilon_3 = \upsilon_0 - g \cdot t_3 = 20m/s - 10m/s^2 \cdot 5s \Rightarrow \upsilon_3 = -30m/s$ το σώμα κατέρχεται.

$y_3 = \upsilon_0 \cdot t_3 - \frac{1}{2} y \cdot t_3^2 = 20m/s \cdot 5s - \frac{1}{2} \cdot 10m/s^2 \cdot 5^2 s^2 \Rightarrow y_3 = -25m$ το σώμα βρίσκεται 25m κάτω από το σημείο που εκτοξεύθηκε (στο έδαφος) .

9. Αερόστατο ανέρχεται κατακόρυφα με ταχύτητα $\upsilon_0 = 20\,m/s$. Κάποια στιγμή που το αερόστατο βρίσκεται σε ύψος $H = 300\,m$ αφήνεται από αυτό ελεύθερα να πέσει ένα μικρό σώμα. Να υπολογιστούν:



α. το μέγιστο ύψος του σώματος από το έδαφος

β. μετά από πόσο χρόνο το σώμα φτάνει στο έδαφος

γ. η θέση του αερόστατου όταν το σώμα φτάσει στο έδαφος

δ. η ταχύτητα του σώματος όταν χτυπήσει το έδαφος.

Δίνεται: $g = 10\,m/s^2$

Λύση:

Το σώμα όταν το αφήσουμε ελεύθερο έχει την ταχύτητα του αερόστατου υ_0. Επομένως θα κινηθεί κατακόρυφα προς τα πάνω και θα φτάσει σε ύψος h:

$$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 - 2gh \Rightarrow 0 = \upsilon_0^2 - 2gh \Rightarrow h = \frac{\upsilon_0^2}{2g} \Rightarrow h = 20m$$

ο χρόνος υπολογίζετε από $\upsilon = \upsilon_0 - gt_1 \Rightarrow 0 = \upsilon_0 - gt_1 \Rightarrow t_1 = \frac{\upsilon_0}{g} \Rightarrow t_1 = 2s$

α. Άρα το μέγιστο ύψος του σώματος από το έδαφος είναι:

$H_{ολ} = H + h = 300m + 20m = 320\,m$

β. Ο χρόνος που το σώμα φτάνει στο έδαφος είναι: $t_{ολ} = t_1 + t_2$ (1)

Από το ύψος $H + h$ το σώμα πέφτει ελεύθερα χωρίς αρχική ταχύτητα σε χρόνο t_2, οπότε έχουμε:

$H + h = \frac{1}{2}gt_2^2 \Rightarrow t_2^2 = \frac{2(H+h)}{g} \Rightarrow t_2^2 = 64s^2 \Rightarrow t_2 = 8s$. Άρα $t_{ολ} = 2s + 8s = 10s$.

γ. Το αερόστατο ανέρχεται με σταθερή ταχύτητα, επομένως σε χρόνο $t_{ολ}$ αυτό θα έχει ανέβει κατά $h_1 = \upsilon_0 \cdot t_{ολ} = 20m/s \cdot 10s \Rightarrow h_1 = 200m$.

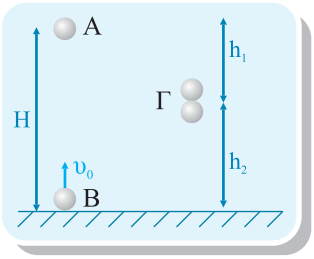
Άρα η θέση του αερόστατου από το έδαφος όταν το σώμα φτάνει σε αυτό είναι: $H_{αερ} = H + h_1 = 300m + 200m \Rightarrow H_{αερ} = 500\,m$.

δ. Η ταχύτητα του σώματος στο έδαφος είναι:

$\upsilon = g \cdot t_2 = 10m/s^2 \cdot 8s = 80\,m/s$.

10. Από ύψος $H = 100$ αφήνουμε ένα σώμα να πέσει ελεύθερο. Από το έδαφος και στην ίδια κατακόρυφο εκτοξεύουμε ταυτόχρονα ένα άλλο σώμα προς τα πάνω με $\upsilon_0 = 50\,m/s$. Να βρείτε που και πότε θα συναντηθούν; Δίνεται: $g = 10\,m/s^2$.

Λύση:



Έστω ότι θα συναντηθούν στο σημείο Γ.

Για το πρώτο σώμα: $h_1 = \frac{1}{2} g \cdot t^2$

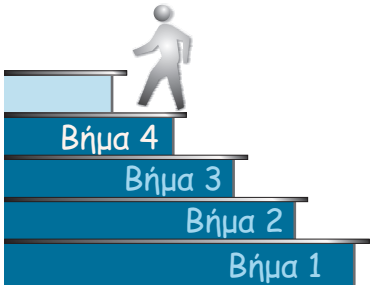
Για το δεύτερο σώμα: $h_2 = \upsilon_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$

Όμως: $H = h_1 + h_2 \Rightarrow H = \frac{1}{2} g t^2 + \upsilon_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow$

$$H = \upsilon_0 t \Rightarrow t = \frac{H}{\upsilon_0} = \frac{100m}{50m/s} \Rightarrow t = 2s$$

Οπότε: $h_2 = \upsilon_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \Rightarrow h_2 = 80m$

Θα συναντηθούν μετά από 2s σε ύψος 80m από το έδαφος.



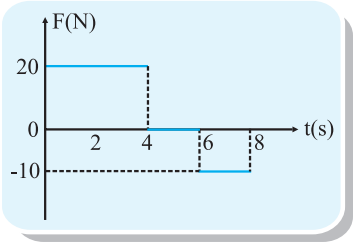
Λύνουμε μόνοι μας

1. Σώμα μάζας $m = 1kg$ κινείται με $\upsilon_0 = 20m/s$.

α. Στο σώμα ασκείται δύναμη $F = 10N$ που έχει την ίδια κατεύθυνση με την υ_0. Ποια θα είναι η μετατόπιση και η ταχύτητα μετά από χρόνο 2s.

β. Στο σώμα ασκείται δύναμη $F = 10N$ που έχει την ίδια διεύθυνση αλλά αντίθετη φορά με την υ_0. Ποια είναι η μετατόπιση μέχρι να σταματήσει στιγμιαία το σώμα. Στην περίπτωση αυτή μετά από πόσο χρόνο το σώμα θα έχει πάλι ταχύτητα 20m/s;

2. Αν την $t_0 = 0$ και $x_0 = 0$ το σώμα ήταν ακίνητο και η μάζα του είναι $m = 1kg$ και η δύναμη οριζόντια και μεταβάλλεται όπως δείχνει το διάγραμμα, να βρείτε την ολική μετατόπιση και να γίνουν τα διαγράμματα α-t, υ-t, x-t.



3. Σε σώμα μάζας $m = 100kg$, το οποίο κινείται πάνω σε ευθύγραμμη τροχιά με ταχύτητα 36Km/h, ασκείται δύναμη $F = 200N$ κατά τη διεύθυνση της κίνησής του για χρόνο $t = 10s$. Να βρεθεί η ταχύτητά του στο τέλος του δέκατου δευτερολέπτου.

α. Αν η φορά της δύναμης συμπίπτει με τη φορά της κίνησής του.

β. Αν είναι αντίθετη από αυτή.

4. Δύο σώματα της ίδιας μάζας βρίσκονται σε λείο και οριζόντιο επίπεδο και συνδέονται μεταξύ τους με νήμα που έχει όριο θραύσης $T_0 = 50N$. Να υπολογιστεί η ελάχιστη τιμή της οριζόντιας δύναμης F που πρέπει να ασκηθεί στο ένα σώμα για να σπάσει το νήμα.

5. Η μηχανή τρένου έχει μάζα $m_M = 10tn$ και τα βαγόνια του $m_B = 60tn$. Το τρένο κινείται ευθύγραμμα με επιτάχυνση $\alpha_1 = 1,5 m/s^2$. Με ποια επιτάχυνση α_2 θα κινείται το τρένο, όταν αφαιρέσουμε από αυτό βαγόνια μάζας $m = 17,5tn$; Η δύναμη της μηχανής παραμένει σταθερή.

6. Δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 με μάζες $m_1 = 30kg$ και $m_2 = 20kg$ αντίστοιχα είναι δεμένα με νήμα μικρού μήκους και ηρεμούν σε οριζόντιο επίπεδο. Τα σώματα σύρονται από οριζόντια δύναμη $F = 80N$ που ασκείται στη μάζα m_2 ξεκινώντας από την ηρεμία. Αν μετά από χρόνο $t_1 = 5s$ το νήμα κόβεται, να υπολογιστεί πόσο θα απέχουν τα δύο σώματα σε χρόνο $t = 5s$ μετά το κόψιμο του σχοινιού, αν η δύναμη F εξακολουθεί να ασκείται στη μάζα m_2. Τριβές δεν υπάρχουν.

7. Σώμα βάλλεται από την κορυφή ψηλού πύργου με ταχύτητα $\upsilon_0 = 30 m/s$ κατακόρυφα προς τα πάνω.

α. Να υπολογιστεί η ταχύτητα και η χρονική στιγμή που το σώμα φτάνει στο μισό του μέγιστου ύψους.

β. Ποια είναι η απομάκρυνση του σώματος τις χρονικές στιγμές $t_1 = 2s$, $t_2 = 4s$, $t_3 = 8s$.

γ. Ποια χρονική στιγμή το σώμα θα βρίσκεται σε απόσταση $h = -200m$ κάτω από το σημείο βολής; $g = 10 m/s^2$.

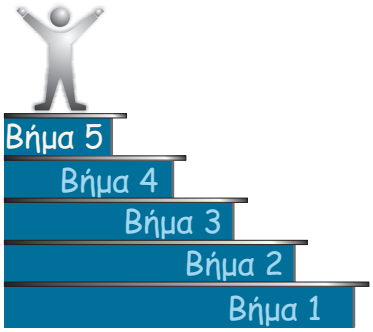
8. Από ύψος $h = 180m$ αφήνουμε να πέσει μία πέτρα ενώ την ίδια χρονική στιγμή από το ίδιο ύψος ρίχνουμε κατακόρυφα προς τα κάτω μια άλλη με $\upsilon_0 = 25 m/s$.

α. Να βρείτε τις ταχύτητες με τις οποίες φτάνουν στο έδαφος.

β. Πόσο απέχουν όταν η μία από αυτές φτάνει στο έδαφος.

Δίνεται $g = 10 m/s^2$.

9. Από ένα αερόστατο, που ανεβαίνει κατακόρυφα με σταθερή ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 = 40 m/s$, ρίχνουμε προς τα κάτω βόμβα, η οποία, όταν φτάνει στο έδαφος, εκρήγνυται. Ο χρόνος που περνά από τη στιγμή που ρίξαμε τη βόμβα μέχρι να ακουστεί η έκρηξη στο αερόστατο τη στιγμή που ρίξαμε τη βόμβα. Δίνονται $\upsilon_{ήχου} = 340 m/s$, $g = 10 m/s^2$ και ότι η αρχική ταχύτητα της βόμβας ως προς το έδαφος είναι μηδέν.



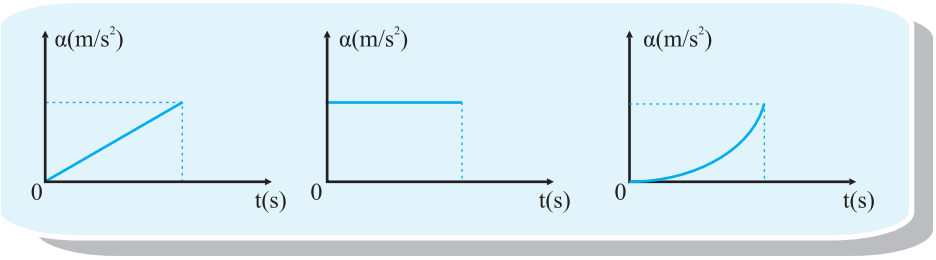
Ελέγχουμε τις γνώσεις μας

Θέμα 1ο

Α. Σώμα κίνειται ευθύγραμμα με την επίδραση σταθερής συνισταμένης δύναμης που έχει την κατεύθυνση της κίνησης. Ποια είναι η σωστή απάντηση;

α. Η μάζα του σώματος αυξάνεται.
β. Η επιτάχυνση του σώματος αυξάνεται.
γ. Ο ρυθμός μεταβολής της θέσης του σώματος αυξάνεται.
δ. Η ταχύτητα παραμένει σταθερή.

Β. Μια μικρή σφαίρα κάνει ελεύθερη πτώση. Ποιο είναι το σωστό διάγραμμα επιτάχυνσης - χρόνου.



Γ. Αν σ' ένα σώμα η συνισταμένη δύναμη είναι μηδέν $\Sigma F = 0$.

α. Αποκτά σταθερή επιτάχυνση.
β. Η επιτάχυνση του αυξάνει.
γ. Η ταχύτητά του είναι σταθερή ή μηδέν.
δ. Η ταχύτητά του αυξάνει.

Δ. Αντιστοιχίστε τα στοιχεία της αριστερής με αυτά της δεξιάς στήλης.

α. $\overset{\upsilon}{\rightarrow}$ $\overset{\alpha}{\rightarrow}$	**1.** Η ταχύτητα μειώνεται
β. $\overset{\alpha}{\leftarrow}$ $\overset{\upsilon}{\rightarrow}$	**2.** Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση
γ. $\upsilon = 0$ $\overset{\alpha}{\rightarrow}$	**3.** Το κινητό ξεκινά από την ηρεμία
δ. $\alpha = 0$ $\overset{\upsilon}{\rightarrow}$	**4.** Η ταχύτητα αυξάνεται.
	5. Το σώμα ηρεμεί.

Ε. Χαρακτηρίστε με (Σ) τις σωστές προτάσεις και με (Λ) τις λανθασμένες.

α. Αδράνεια είναι η δύναμη η οποία διατηρεί την κίνηση των σωμάτων. ( )

β. $1N = 1kg\,m/s^2$. ( )

γ. Ένα σώμα σταματά, όταν δεν ασκούνται πάνω δυνάμεις. ( )

δ. Η μάζα ενός σώματος είναι σταθερή, ενώ το βάρος του αλλάζει από τόπο σε τόπο. ( )

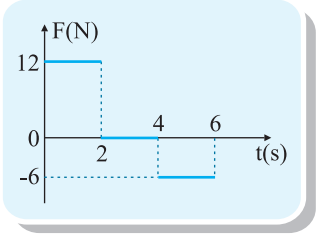
ε. Στην ελεύθερη πτώση η μετατόπιση που διανύει ένα σώμα είναι ανάλογη του χρόνου πτώσης του. ( )

Θέμα 2ο

Α. Διερευνήστε την $\Sigma\vec{F} = m \cdot \vec{\alpha}$ αν:

α. $\Sigma\vec{F} = 0$ **β.** $\Sigma\vec{F} =$ σταθερή **γ.** $\Sigma\vec{F} =$ μεταβλητή

Β. Ένα σώμα που αρχικά ηρεμεί δέχεται την επίδραση συνισταμένης δύναμης όπως στο σχήμα. Αν η μάζα του είναι $m = 2kg$ τότε:



Ι. Γράψτε το είδος της κίνησης του σώματος:

α. ο έως 2s:

β. 2s έως 4s:

γ. 4s έως 6s:

ΙΙ. Πόση είναι η επιτάχυνσή του τις χρονικές στιγμές:

$t_1 = 1{,}89s:\ \alpha_1 =$

$t_2 = 2{,}05s:\ \alpha_2 =$

$t_3 = 5s:\ \alpha_3 =$

ΙΙΙ. Ποια είναι η μετατόπισή του την $t = 1s$:

α. 2m, **β.** 3m, **γ.** 5m, **δ.** 6m

Γ. Δώστε τις εξισώσεις και τα διαγράμματα της επιτάχυνσης, της ταχύτητας και της μετατόπισης σε συνάρτηση με τον χρόνο, στην ελεύθερη πτώση.

Θέμα 3ο

Ένα σώμα είναι αρχικά ακίνητο σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Στο σώμα ασκούνται δύο οριζόντιες αντίρροπες δυνάμεις 8N και 5N. Ύστερα από 3s η μετατόπιση του σώματος είναι 18m. Πόση είναι η μάζα του σώματος;

Θέμα 4ο

Ένα σώμα που πέφτει ελεύθερα έχει σ'ένα σημείο της τροχιάς του ταχύτητα 40m/s ενώ σ' ένα χαμηλότερο σημείο Β ταχύτητα 150m/s. Πόση είναι η απόσταση ΑΒ. Δίνεται $g = 10 m/s^2$.

Κεφάλαιο 3ο

Δυναμική στο επίπεδο

Ο μαθητής που έχει μελετήσει το κεφάλαιο δυναμική στο επίπεδο πρέπει:

- ✓ Να γνωρίζει τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα και τις εφαρμογές του.
- ✓ Να γνωρίζει τον 3ο Νόμο του Νεύτωνα και τις εφαρμογές του.
- ✓ Να γνωρίζει τα είδη δυνάμεων επαφής και απόστασης.
- ✓ Να μπορεί να υπολογίσει την συνισταμένη δύο ή περισσότερων ομοεπίπεδων δυνάμεων.
- ✓ Να μπορεί να αναλύσει ομοεπίπεδες δυνάμεις.
- ✓ Να γνωρίζει την Αρχή της Ανεξαρτησίας των κινήσεων.
- ✓ Να γνωρίζει τις έννοιες και τις εξισώσεις της οριζόντιας βολής.
- ✓ Να γνωρίζει ποια κίνηση λέγεται ομαλή κυκλική κίνηση και τις εξισώσεις της.
- ✓ Να γνωρίζει τι λέγεται περίοδος και τι συχνότητα.
- ✓ Να ξεχωρίζει την έννοια της γραμμικής από την γωνιακή ταχύτητα στην ομαλή κυκλική κίνηση και να γνωρίζει τη μεταξύ τους σχέση.

Τυπολόγιο 3ου Κεφαλαίου

Δυναμική στο επίπεδο

Σύνθεση δύο ομοεπιπέδων δυνάμεων.

Μέτρου: $F=\sqrt{F_1^2+F_2^2+2F_1F_2\sigma\upsilon\nu\varphi}$ Κατεύθυνσης: $\varepsilon\varphi\theta=\dfrac{F_2\eta\mu\varphi}{F_1+F_2\sigma\upsilon\nu\varphi}$, $\theta=\widehat{(\vec{F}_1,\vec{F})}$

Σύνθεση δύο καθέτων ομοεπιπέδων δυνάμεων.

Μέτρου: $F=\sqrt{F_1^2+F_2^2}$ Κατεύθυνσης: $\varepsilon\varphi\theta=\dfrac{F_2}{F_1}$, $\theta=\widehat{(\vec{F}_1,\vec{F})}$

Σύνθεση πολλών ομοεπιπέδων δυνάμεων.

Μέτρου: $\Sigma F=\sqrt{\Sigma F_x^2+\Sigma F_y^2}$ Κατεύθυνσης: $\varepsilon\varphi\theta=\dfrac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x}$, $\theta=\widehat{(\Sigma\vec{F}_x,\Sigma\vec{F})}$

Ισορροπία ομοεπιπέδων δυνάμεων: $\Sigma F_x=0$ $\Sigma F_y=0$

Τριβή ολίσθησης: $T=\mu\cdot N$

Οριζόντια βολή

xx΄	yy΄
$\alpha_x=0$	$\alpha_y=g$
$\upsilon_x=\upsilon_0$	$\upsilon_y=gt$
$x=\upsilon_0 t$	$y=\dfrac{1}{2}gt^2$

$\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}_x+\vec{\upsilon}_y$

Μέτρο: $\upsilon=\sqrt{\upsilon_0^2+g^2t^2}$

Κατεύθυνση: $\varepsilon\varphi\theta=\dfrac{\upsilon_y}{\upsilon_0}$, $\theta=\widehat{(\vec{\upsilon}_0,\vec{\upsilon})}$

2ος Ν. Νεύτωνα σε διανυσματική και αλγεβρική μορφή

$\Sigma\vec{F}=m\cdot\vec{\alpha}$ $\Sigma F_x=m\cdot\alpha_x$ $\Sigma F_y=m\cdot\alpha_y$

Ομαλή κυκλική κίνηση

$f=\dfrac{1}{T}=\dfrac{N}{t}$ $\omega=\dfrac{\theta}{t}=\dfrac{2\pi}{T}=2\pi f=\dfrac{\upsilon}{R}$

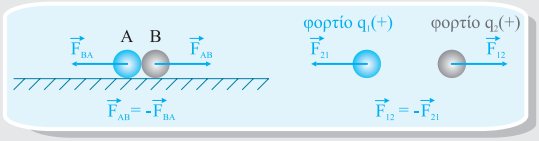
$\upsilon=\dfrac{S}{t}=\dfrac{2\pi R}{T}=2\pi Rf$ $\alpha_\kappa=\dfrac{\upsilon^2}{R}=\omega^2R=\dfrac{4\pi^2}{T^2}R=4\pi^2f^2R$

$$F_\kappa=m\alpha_\kappa=\frac{m\upsilon^2}{R}=m\omega^2R=m\cdot\frac{4\pi^2}{T^2}R=m\cdot4\pi^2f^2R$$

Δυναμική στο επίπεδο: Τύποι - Βασικές έννοιες

Διατυπώστε το νόμο δράσης - αντίδρασης του Νεύτωνα:

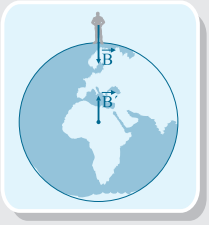
Όταν δύο σώματα Α και Β αλληλεπιδρούν και το σώμα Α ασκεί μία δύναμη στο σώμα Β, τότε και το σώμα Β ασκεί στο σώμα Α δύναμη ίσου μέτρου και αντίθετης κατεύθυνσης.
Σχηματικά ισχύει:



α. Η μία από τις δύο δυνάμεις ονομάζεται δράση και η άλλη αντίδραση
β. Σε κάθε δράση αναπτύσσεται πάντα μία αντίδραση. Δράση και αντίδραση συνυπάρχουν. Έτσι οι δυνάμεις στη φύση εμφανίζονται πάντα ανά ζεύγη.
γ. Δράση και αντίδραση ασκούνται σε διαφορετικά σώματα.

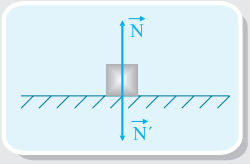
Δώστε παραδείγματα δράσης αντίδρασης:

1. Βάρος σώματος:



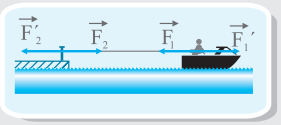
$\vec{B}$: Η δύναμη που ασκεί η Γη στο σώμα
$\vec{B}'$: Η δύναμη που ασκεί το σώμα στη Γη.
Ισχύει: $\vec{B} = -\vec{B}'$
Τα σώματα κινούνται προς τη Γη και όχι η Γη προς τα σώματα λόγω της μικρής τους μάζας συγκριτικά με τη μάζα της Γης.

2. Δύναμη από το δάπεδο (κάθετη αντίδραση):



$\vec{N}$: Δύναμη από το δάπεδο στο σώμα
$\vec{N}'$: Δύναμη από το σώμα στο δάπεδο
Ισχύει: $\vec{N} = -\vec{N}'$

3. Τάση νήματος:



$\vec{F}_1'$: Η δύναμη που ασκεί ο άνθρωπος στο σχοινί
$\vec{F}_1$: Η δύναμη που ασκεί το σχοινί στον άνθρωπο - αντίδραση της $\vec{F}_1'$
$\vec{F}_2'$: Η δύναμη που ασκεί ο κάβος στο σχοινί
$\vec{F}_2$: Η δύναμη που ασκεί το σχοινί στον κάβο - αντίδραση της $\vec{F}_2'$
Ισχύει: $\vec{F}_1 = -\vec{F}_1'$ και $\vec{F}_2 = -\vec{F}_2'$
Επίσης για σχοινί χωρίς μάζα (αμελητέα) ισχύει για τα μέτρα τους: $F_1 = F_2$. Έτσι $F_1 = F_1' = F_2 = F_2'$. Η βάρκα και ο άνθρωπος κινούνται προς την προκυμαία λόγω της $\vec{F}_1$.

Τι γνωρίζουμε για τις δυνάμεις επαφής;

Δυνάμεις επαφής είναι μεταξύ άλλων και οι παρακάτω:

α. Τριβή, **β.** Τάση νήματος,
γ. Δύναμη ελατηρίου, **δ.** Άνωση,
ε. Αντίσταση αέρα, **στ.** Κάθετη δύναμη στήριξης

Τι γνωρίζουμε για τις δυνάμεις από απόσταση;

Οι δυνάμεις από απόσταση αναπτύσσονται:

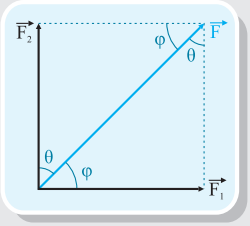
α. Ανάμεσα σε μαγνήτες **β.** Ανάμεσα σε ηλεκτρικά φορτία και
γ. Μεταξύ μαζών.

Πως συνθέτουμε δύο ομοεπίπεδες δυνάμεις με κάθετες διευθύνσεις;

Ισχύει: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

Μέτρο της $\vec{F}$: $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$

Κατεύθυνση της $\vec{F}$: $εφφ = \frac{F_2}{F_1}$ όπου φ η γωνία που σχηματίζει η συνισταμένη $\vec{F}$ με την $\vec{F}_1$ ή $εφθ = \frac{F_1}{F_2}$.



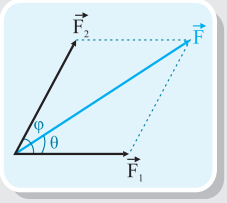
Η επιλογή της φ ή της θ είναι αυθαίρετη.

Πως συνθέτουμε δύο ομοεπίπεδες δυνάμεις, που οι διευθύνσεις τους σχηματίζουν γωνία φ μεταξύ τους;

Ισχύει: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

Για το μέτρο της $\vec{F}$: $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2συνφ}$

Για την κατεύθυνση της $\vec{F}$: $εφθ = \frac{F_2ημφ}{F_1 + F_2συνφ}$ όπου θ η γωνία που σχηματίζει η F με την F_1.



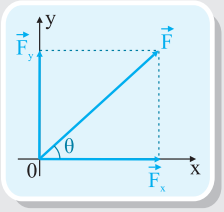
Πως αναλύουμε δυνάμεις σε δύο συνιστώσες;

Συνήθως η ανάλυση γίνεται σε δύο κάθετες συνιστώσες:

$συνθ = \frac{F_x}{F} \Rightarrow F_x = Fσυνθ$

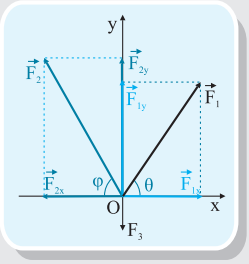
$ημθ = \frac{F_y}{F} \Rightarrow F_y = Fημθ$

Η γωνία θ θεωρείται γνωστή.



Πως συνθέτουμε περισσότερες από δύο δυνάμεις;

Για να βρούμε τη συνισταμένη περισσοτέρων των δύο δυνάμεων ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα.

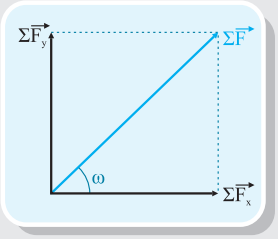


α. Επιλέγουμε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων με αρχή το σημείο εφαρμογής των δυνάμεων. Η επιλογή του συστήματος είναι αυθαίρετη έτσι ώστε να χρειάζονται όσο το δυνατόν λιγότερες αναλύσεις.

β. Αναλύουμε όσες δυνάμεις δεν είναι πάνω στους άξονες σε συνιστώσες: $F_{1x} = F_1 συνθ$, $F_{1y} = F_1 ημθ$,

$$F_{2x} = F_2 συνφ\ ,\ F_{2y} = F_2 ημφ$$

γ. Υπολογίζουμε τη συνισταμένη $\left(\Sigma\vec{F}_x \text{ κ' } \Sigma\vec{F}_y\right)$ σε κάθε άξονα προσθέτοντας αλγεβρικά τις συνιστώσες (ή τις δυνάμεις) που βρίσκονται πάνω σε κάθε άξονα ξεχωριστά: $\Sigma F_x = F_{1x} - F_{2x}$, $\Sigma F_y = F_{1y} + F_{2y} - F_3$



δ. Οι δυνάμεις $\Sigma\vec{F}_x$ και $\Sigma\vec{F}_y$ είναι κάθετες μεταξύ τους. Έτσι για τη συνισταμένη ισχύει:

Για το μέτρο $\Sigma F = \sqrt{\Sigma F^2 + \Sigma F_y^2}$

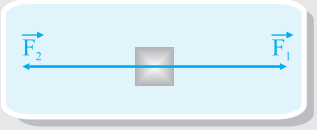
Για την κατεύθυνση $εφω = \dfrac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x}$

Πότε ένα υλικό σημείο ισορροπεί;

Ένα σώμα που το θεωρούμε υλικό σημείο ισορροπεί όταν η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σ' αυτό είναι μηδέν.

Αν $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ ή $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ...\vec{F}_v = \vec{0}$ τότε: $\vec{υ} = \vec{0}$ ή $\vec{υ} =$ σταθερό και αντιστρόφως.

Πότε ισορροπούν δύο δυνάμεις;

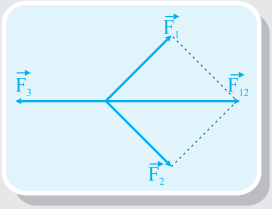


$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Για τα μέτρα των δυνάμεων ισχύει

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_1 - F_2 = 0 \Rightarrow F_1 = F_2$$

Πότε ισορροπούν τρεις ομοεπιπέδες δυνάμεις;



Όταν υλικό σημείο ισορροπεί υπό την επίδραση τριών ομοεπιπέδων δυνάμεων η συνισταμένη των δύο από αυτές θα πρέπει να είναι αντίθετη της τρίτης.

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\vec{F}_3 \Rightarrow \vec{F}_{12} = -\vec{F}_3$$

Ποια είναι η αναλυτική μέθοδος για ισορροπία τριών ή περισσοτέρων ομοεπιπέδων δυνάμεων;

α. Επιλέγουμε αυθαίρετα κατάλληλο ορθογώνιο σύστημα ΧΟΥ αξόνων. Η επιλογή γίνεται έτσι ώστε να χρειάζονται όσο το δυνατόν λιγότερες αναλύσεις δυνάμεων.

β. Αναλύουμε όσες δυνάμεις δεν είναι πάνω στους άξονες.

γ. Εφαρμόζουμε συνθήκη ισορροπίας σε κάθε άξονα.

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{1x} + F_{2x} + ... = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{1y} + F_{2y} + ... = 0 \quad (2)$$

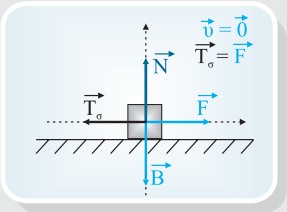
δ. Οι σχέσεις (1), (2) είναι ικανές και αναγκαίες ώστε ένα σώμα να ισορροπεί.

Δηλαδή: $\left.\begin{array}{l}\Sigma\vec{F}_x = \vec{0}\\ \Sigma\vec{F}_y = \vec{0}\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{\upsilon} = 0$ ή $\vec{\upsilon} = \text{σταθ.}$

και όταν $\vec{\upsilon} = 0$ η $\vec{\upsilon} = \text{σταθερό}$ τότε: $\Sigma\vec{F}_x = 0$

$\Sigma\vec{F}_y = 0$

Δώστε τον ορισμό της στατικής τριβής. Από τι εξαρτάται;



Είναι η δύναμη που αναπτύσσεται από ένα σώμα Α σε ένα σώμα Β όταν λόγω της επίδρασης εξωτερικής δύναμης $\vec{F}$ στο Β αυτό τείνει να κινηθεί ως προς το Α χωρίς να το καταφέρνει. Στο σώμα Α ασκείται φυσικά από το Β η αντίδραση της παραπάνω δύναμης.

Για το μέτρο της μέγιστης στατικής τριβής ισχύει:

$T_{\sigma max} = \mu_\sigma N$ όπου μ_σ ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής που εξαρτάται από τη φύση των επιφανειών που έρχονται σε επαφή και $\vec{N}$ η κάθετη αντίδραση.

Γενικά για τη στατική τριβή ισχύει: $0 \le T_\sigma \le T_{\sigma max} = \mu_\sigma N$

Συνοπτικά για τη στατική τριβή ισχύει ότι:

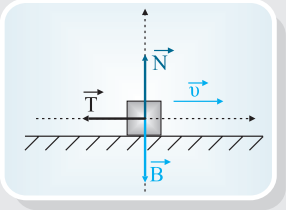
α. Είναι ανεξάρτητη από το εμβαδόν της επιφάνειας συνεπαφής.

β. Έχει μεταβλητό μέτρο. Ελάχιστη τιμή μηδέν και μέγιστη $T_{\sigma max} = \mu_\sigma N$.

γ. Εξαρτάται από τα υλικά που έρχονται σε επαφή.

δ. Η μέγιστη τιμή της που λέγεται και οριακή στατική τριβή εξαρτάται από τη δύναμη $\vec{N}$ που δρα κάθετα από τη μια επιφάνεια στην άλλη και τον συντελεστή οριακής στατικής τριβής.

Δώστε τον ορισμό της τριβής ολίσθησης. Από τί εξαρτάται; Τι γνωρίζετε για τον συντελεστή τριβής ολίσθησης;



Είναι μια δύναμη που αναπτύσσεται ανάμεσα σε δύο σώματα που βρίσκονται σε επαφή και το ένα ολισθαίνει ως προς το άλλο.
Έχει πάντοτε φορά αντίθετη από την ταχύτητα του σώματος (ως προς το σώμα που ασκεί την τριβή). Το μέτρο της είναι σταθερό και ίσο με $T = \mu \cdot N$ όπου μ ο συντελεστής τριβής ολίσθησης που είναι καθαρός αριθμός. Η διεύθυνσή της είναι παράλληλη με την διαχωριστική επιφάνεια των δύο σωμάτων.
Συνοπτικά για την τριβή ολίσθησης.

α. Το μέτρο της είναι σταθερό και ανεξάρτητο της ταχύτητας με την οποία κινείται το ένα σώμα ως προς το άλλο (για μικρές ταχύτητες).
β. Το μέτρο της ανεξάρτητο από το εμβαδό συνεπαφής (για μικρές ταχύτητες).
γ. Το μέτρο της εξαρτάται από τα υλικά που έρχονται σε επαφή.
δ. Το μέτρο της εξαρτάται από το μέτρο της κάθετης δύναμης στήριξης (κάθετη αντίδραση).

Ποιες είναι οι δυνατές περιπτώσεις εφαρμογής του 2ου Νόμου του Νεύτωνα;

Σχέση Δυνάμεων	Είδος Κίνησης στον άξονα xx΄	Είδος Κίνησης στον άξονα yy΄
$\Sigma F_x = 0$ και $\Sigma F_y = 0$	$\alpha_x = 0$ Ισορροπεί	$\alpha_y = 0$ Ισορροπεί
$\Sigma F_x \neq 0$ και $\Sigma F_y = 0$	$\alpha_x = \frac{\Sigma F_x}{m}$ Επιταχύνεται	$\alpha_y = 0$ Ισορροπεί
$\Sigma F_x = 0$ και $\Sigma F_y \neq 0$	$\alpha_x = 0$ Ισορροπεί	$\alpha_y = \frac{\Sigma F_y}{m}$ Επιταχύνεται
$\Sigma F_x \neq 0$ και $\Sigma F_y \neq 0$	$\alpha_x = \frac{\Sigma F_x}{m}$ Επιταχύνεται	$\alpha_y = \frac{\Sigma F_y}{m}$ Επιταχύνεται

Με τον όρο ισορροπεί εννοούμε ότι $\vec{\upsilon} = \vec{0}$ (ηρεμεί) η $\vec{\upsilon} =$ σταθ (ευθ. ομαλή)

Τι γνωρίζετε για τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα σε Διανυσματική και σε Αλγεβρική μορφή;

Από το 2ο Νόμο του Νεύτωνα γνωρίζουμε ότι για ένα σώμα στο οποίο ασκούνται πολλές ομοεπίπεδες δυνάμεις ισχύει ότι:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha} \Leftrightarrow \begin{cases} \Sigma\vec{F}_x = m\vec{\alpha}_x \\ \Sigma\vec{F}_y = m\vec{\alpha}_y \end{cases}$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι εάν είναι γνωστές οι συνιστώσες για τα μέτρα τους ισχύει:

$$\Sigma F = \sqrt{\Sigma F_x^2 + \Sigma F_y^2} \quad \text{και} \quad \alpha = \sqrt{\alpha_x^2 + \alpha_y^2}$$

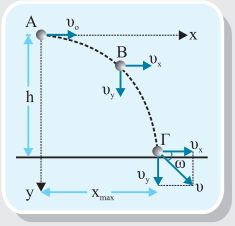
Τι γνωρίζουμε για την αρχή της ανεξαρτησίας των κινήσεων;

Η αρχή διατυπώνεται ως εξής:

"Όταν ένα κινητό εκτελεί ταυτόχρονα δύο ή περισσότερες κινήσεις, κάθε μία από αυτές εκτελείται εντελώς ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες και η θέση στην οποία φτάνει το κινητό μετά από χρόνο t, είναι η ίδια είτε οι κινήσεις εκτελούνται ταυτόχρονα, είτε εκτελούνται διαδοχικά, σε χρόνο t η κάθε μία".

Για τον υπολογισμό της ταχύτητας και της μετατόπισης σε κάποιο χρόνο t, γράφουμε το διανυσματικο άθροισμα των ταχυτήτων και μετατοπίσεων αντίστοιχα, που θα είχε το κινητό αν εκτελούσε κάθε μία κίνηση ανεξάρτητα και επί χρόνο t.

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2 \quad \text{και} \quad \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$$



Όταν ρίχνουμε ένα σώμα από ύψος h οριζόντια με ταχύτητα υ_0 και αγνοούμε την αντίσταση του αέρα, τότε η κίνηση που μελετάμε ονομάζεται **οριζόντια βολή**. Είναι μια σύνθετη κίνηση και αποτελείται από δύο απλές κινήσεις μια κατακόρυφη, που είναι **ελεύθερη πτώση** (λόγω βαρύτητας), και μια οριζόντια, που είναι **ευθύγραμμη ομαλή** (επειδή δεν ασκείται δύναμη στην οριζόντια διεύθυνση).

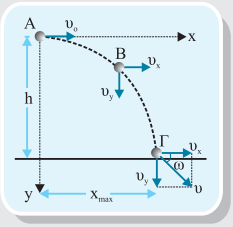
Ποιες είναι οι εξισώσεις κίνησης στην οριζόντια βολή;

οριζόντιος άξονας xx΄: $\alpha_x = 0$, $\upsilon_x = \upsilon_0$, $x = \upsilon_0 \cdot t$

κατακόρυφος άξονας yy΄: $\alpha_y = g$, $\upsilon_y = g \cdot t$, $y = \frac{1}{2} g \cdot t^2$

Ποιες είναι οι εξισώσεις τροχιάς - χρόνου - βελινεκούς - ταχύτητας, στην οριζόντια βολή;

Η εξίσωση της τροχιάς: $y = \frac{g}{2\upsilon_0^2} x^2$



Επειδή είναι εξίσωση της μορφής $y = \kappa \cdot x^2$, η οποία είναι εξίσωση παραβολής, γι' αυτό και η τροχιά του σώματος στην οριζόντια βολή είναι παραβολή.

Η εξίσωση του χρόνου: $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Η εξίσωση του βελινεκούς: $x_{max} = \upsilon_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Η εξίσωση της ταχύτητας:

Εξίσωση της ταχύτητας για οποιαδήποτε χρονική στιγμή: $\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2}$

Ταχύτητα που θα έχει το σώμα, όταν θα φτάσει στο έδαφος: $\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + g^2 t^2}$

Η κατεύθυνση ορίζεται: $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x}$

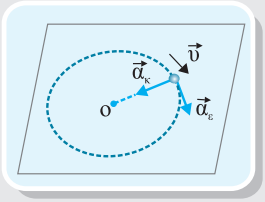
Ποιος είναι ο ορισμός της ομαλής κυκλικής κίνησης;

Την κίνηση ενός σώματος κατά την οποία η τροχιά του είναι περιφέρεια κύκλου και το μέτρο της ταχύτητάς του είναι σταθερό την ονομάζουμε **ομαλή κυκλική**.

Τι γνωρίζουμε για την επιτάχυνση στην ομαλή κυκλική κίνηση;

Η κυκλική κίνηση είναι μια καμπυλόγραμμη κίνηση και η επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ έχει δύο συνιστώσες:

- Μια εφαπτόμενη στην τροχιά, την επιτρόχια $\vec{\alpha}_\varepsilon$ (που δημιουργεί την μεταβολή στο μέτρο της ταχύτητας).
- Μια κάθετη στην ταχύτητα, στη διεύθυνση της ακτίνας με φορά προς το κέντρο της κίνησης, την κεντρομόλο $\vec{\alpha}_\kappa$ (που δημιουργεί την μεταβολή στην διεύθυνση της ταχύτητας).



Στην ομαλή κυκλική κίνηση:

Η επιτρόχια επιτάχυνση είναι: $\alpha_\varepsilon = 0$ διότι το μέτρο της ταχύτητα μένει σταθερό.

Η κεντρομόλος επιτάχυνσης είναι: $\alpha_\kappa = \frac{\upsilon^2}{R}$, $(1 m/s^2)$

όπου R: ακτίνα τροχιάς

- κάθετη στην ταχύτητα υ
- ίδια διεύθυνση με την ακτίνα της τροχιάς
- φορά προς το κέντρο της τροχιάς

Τι ονομάζουμε περίοδο στην ομαλή κυκλική κίνηση;

Περίοδος Τ ονομάζεται ο χρόνος που χρειάζεται ένα κινητό να εκτελέσει μια περιστροφή. Μονάδες S.I. 1s

Δώστε τον ορισμό της συχνότητας στην ομαλή κυκλική κίνηση:

Συχνότητα f ονομάζεται το πηλίκο του αριθμού των περιστροφών N που εκτελεί σε κάποιο χρόνο το κινητό, προς το χρόνο αυτό: $f = \frac{N}{t}$, Μονάδες S.I. 1Hz = $1s^{-1}$.

Τι γνωρίζουμε για την κεντρομόλο δύναμη;

Η δύναμη αυτή είναι κάθετη στη διεύθυνση της ταχύτητας του σώματος έχει κατεύθυνση προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς και γι' αυτό λέγεται κεντρομόλος δύναμη.
Δεν είναι μία ακόμα δύναμη που ενεργεί στο σώμα, είναι η συνισταμένη όλων των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα κατά τη διεύθυνση της ακτίνας της κυκλικής τροχιάς, με φορά προς το κέντρο του κύκλου.

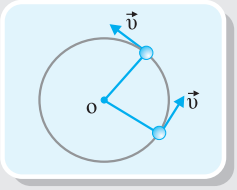
Η βασική προϋπόθεση για να μπορέσει ένα σώμα να εκτελέσει κυκλική κίνηση είναι να υπάρχει κεντρομόλος δύναμη F_κ.

Τα χαρακτηριστικά της F_κ είναι:

- Μέτρο: $F_\kappa = m \cdot \alpha_\kappa$ ή $F_\kappa = \frac{m\upsilon^2}{R}$ ή $\Sigma F_R = \frac{m\upsilon^2}{R}$ Μονάδα S.I. 1N
- Διεύθυνση: ίδια με της ακτίνας του κύκλου (κάθετη στη ταχύτητα υ)
- Φορά: προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς

Ορισμός της γραμμικής ταχύτητας (υ) στην ομαλή κυκλική κίνηση:

Στην ομαλή κυκλική κίνηση η ταχύτητα περιστροφής ή γραμμική ταχύτητα ενός κινητού είναι το φυσικό μέγεθος που έχει μέτρο ίσο με το πηλίκο του μήκους τόξου S που διανύει το κινητό σε κάποιο χρόνο t, προς τον χρόνο αυτό.

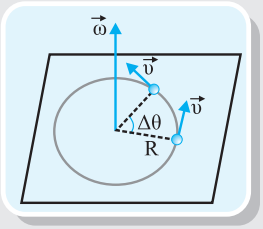


Άρα: $\upsilon = \frac{S}{t}$ Μονάδα S.I. 1m/s

Η διεύθυνση είναι κάθετη στην ακτίνα της τροχιάς, ενώ η κατεύθυνση της μεταβάλλεται συνεχώς, επειδή είναι εφαπτόμενη της τροχιάς.

Ορισμός της γωνιακής ταχύτητας (ω):

Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\omega}$ εκφράζει τη μεταβολή της επίκεντρης γωνίας Δθ που διαγράφει η επιβατική ακτίνα επάνω στην περιφέρεια του κύκλου, προς τον απαιτούμενο χρόνο Δt: $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$



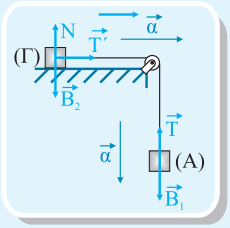
$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$, Μονάδα S.I. 1rad/s

Η διεύθυνση είναι κάθετη στο επίπεδο της τροχιάς.

Η φορά καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Μεθοδολογία ασκήσεων 3ου Κεφαλαίου

1. Σε σύστημα σωμάτων εφαρμόζουμε το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα ξεχωριστά για κάθε σώμα του συστήματος λαμβάνοντας υπόψη μόνο τις δυνάμεις που ασκούνται σ' αυτό (σώμα). Παράδειγμα:



Ισχύει $T = T'$

Σώμα Α: $B_1 - T = m_1\alpha$ (1)

Σώμα Γ: $T' = m_2\alpha \Rightarrow T = m_2\alpha$ (2)

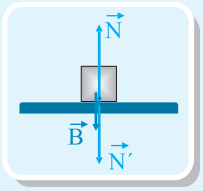
Με πρόσθεση των (1) κ' (2) κατά μέλη:

$$B_1 = (m_1 + m_2)\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2}$$

Το σχοινί και η τροχαλία θεωρούνται αβαρή και δεν υπάρχουν τριβές μεταξύ των σωμάτων

2. Ένδειξη ζυγαριάς.

Η ζυγαριά μετράει τη δύναμη που ασκεί σ' αυτήν το σώμα που είναι τοποθετημένο πάνω της. Η δύναμη αυτή δεν ισούται πάντα με το βάρος του σώματος.



$\vec{B}$: Η δύναμη που ασκεί η γη στο σώμα

$\vec{N}$: Η δύναμη που ασκεί η ζυγαριά στο σώμα.

$\vec{N}'$: Η δύναμη που ασκεί το σώμα στη ζυγαριά

Ισχύει: $\vec{N} = -\vec{N}'$: Η ζυγαριά μετράει τη δύναμη $\vec{N}'$

3. Για τη σύνθεση δυνάμεων που σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία φ απαραίτητες είναι οι γνώσεις των τιμών των παρακάτω τριγωνομετρικών αριθμών:

θ	ημθ	συνθ	εφθ
0°	0	1	0
30°	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60°	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	–

Επίσης για γωνίες μεγαλύτερη των 90° χρησιμοποιούμε τους τύπους:

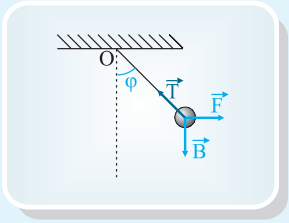
$$\text{ημ}(180 - \theta) = \text{ημθ} \quad \text{και} \quad \text{συν}(180 - \theta) = -\text{συνθ}$$

Μεθοδολογία ασκήσεων στην ισορροπία υλικού σημείου

α. Για την περίπτωση ισορροπίας υλικού σημείου με την επίδραση τριών ομοεπιπέδων δυνάμεων

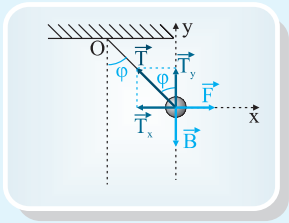
Εφαρμογή

Το σώμα του σχήματος ισορροπεί με την επίδραση οριζόντιας δύναμης $\vec{F}$. Το σώμα είναι δεμένο στο άκρο σχοινιού το άλλο άκρο του οποίου είναι στερωμένο σε οροφή. Να βρεθεί η τάση του σχοινιού και το βάρος του σώματος. Δίνονται μάζα σώματος m και γωνία φ.



1ος τρόπος

Επιλέγουμε κατάλληλους ορθογώνιους αξονες x΄x και y΄y και αναλύουμε την τάση του σχοινιού σ' αυτούς.



$T_x = T \cdot ημφ$

$T_y = T \cdot συνφ$

Επειδή το σώμα ισορροπεί θα ισχύουν οι σχέσεις:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F - T_x = 0 \Rightarrow F = Tημφ \Rightarrow T = \frac{F}{ημφ} \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_y - B = 0 \Rightarrow B = Tσυνφ \quad (2)$$

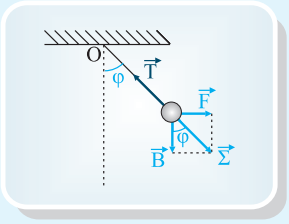
Η (2) λόγω της (1): $B = \frac{F}{ημφ} \cdot συνφ \Rightarrow B = \frac{F}{εφφ}$

2ος τρόπος

Επειδή το σώμα ισορροπεί η συνισταμένη $\vec{F}$ και $\vec{B}$ θα είναι αντίθετη της τάσης $\vec{T}$.

$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F} + \vec{B} + \vec{T} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F} + \vec{B} = -\vec{T} \Rightarrow \vec{\Sigma} = -\vec{T}$

Αλγεβρικά $\Sigma F = 0 \Rightarrow \Sigma - T = 0 \Rightarrow \Sigma = T \quad (3)$



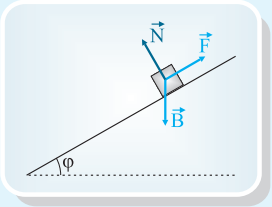
Από το σχήμα: $εφφ = \frac{F}{B} \Rightarrow B = \frac{F}{εφφ}$

$$ημφ = \frac{F}{\Sigma} \Rightarrow \Sigma = \frac{F}{ημφ} \overset{(3)}{\Rightarrow} T = \frac{F}{ημφ}$$

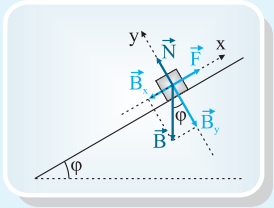
Παρατήρηση: Ο δεύτερος τρόπος συνήθως οδηγεί σε πιο γρήγορη λύση. Επειδή όμως χρησιμοποιείται μόνο για ισορροπία τριών δυνάμεων η ανάλυση σε άξονες είναι προτιμότερη.

β. Ισορροπία σώματος σε κεκλιμένο επίπεδο (λείο)
Εφαρμογή

Το σώμα του σχήματος έχει βάρος $B = 100N$ και ισορροπεί σε λείο κεκλιμένο επίπεδο με την επίδραση δύναμης $\vec{F}$ παράλληλης στο κεκλιμένο επίπεδο. Αν $\varphi = 30^o$ να υπολογιστεί η $\vec{F}$ και η δύναμη $\vec{N}$ από το δάπεδο στο σώμα.



Αναλύουμε το βάρος του σώματος σε ορθογώνιους άξονες τον xx΄ παράλληλο στο κεκλιμένο επίπεδο και τον yy΄ κάθετο σ' αυτό.



Έτσι $B_y = B\sigma\upsilon\nu\varphi$

$B_x = B\eta\mu\varphi$

Από τις συνθήκες ισορροπίας του σώματος παίρνουμε:

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F - B_x = 0 \Rightarrow F = B\eta\mu\varphi = 50N$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - B_y = 0 \Rightarrow N = B\sigma\upsilon\nu\varphi = 50\sqrt{3}N$

γ. Όταν σε ένα υλικό σημείο ασκείται ένας αριθμός δυνάμεων και το σώμα δεν ισορροπεί τότε για να ισορροπήσει πρέπει να ασκήσουμε δύναμη $\vec{F}$ που υπολογίζεται ως εξής:

i. Αναλύουμε τις ήδη υπάρχουσες δυνάμεις σε κατάλληλο ορθωγόνιο σύστημα αξόνων ΧΟΥ

ii. Σχεδιάζουμε την άγνωστη δύναμη $\vec{F}$ με κατεύθυνση τέτοια ώστε οι δύο συνιστώσες της στους άξονες να έχουν θετική αλγεβρική τιμή. (εκτός αν η κατεύθυνσή της είναι προφανής).

iii. Εφαρμόζουμε τις συνθήκες ισορροπίας για το σώμα $\Sigma\vec{F}_x = \vec{0}$ και $\Sigma\vec{F}_y = \vec{0}$ από τις οποίες υπολογίζουμε τις συνιστώσες $\vec{F}_x$ και $\vec{F}_y$ της δύναμης $\vec{F}$.

iv. Για το μέτρο της $\vec{F}$ θα έχουμε: $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ και για την κατεύθυνση της $\varepsilon\varphi\theta = F_y / F_x$ (θ η γωνία με τον άξονα x΄x).

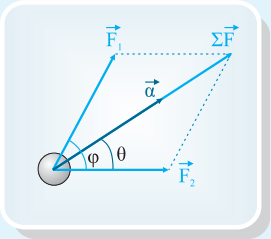
Μεθοδολογία ασκήσεων στον 2ο Νόμο Νεύτωνα στο επίπεδο

1. Όταν σώμα κινείται υπό την επίδραση δύο δυνάμεων που δεν είναι αντίθετες τότε υπολογίζουμε την συνισταμένη των δυνάμεων.

Μέτρο: $\Sigma F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\sigma\upsilon\nu\varphi}$

Κατεύθυνση: $\varepsilon\varphi\theta = \dfrac{F_1\eta\mu\varphi}{F_2 + F_1\sigma\upsilon\nu\varphi}$

και $\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha} \Rightarrow \vec{\alpha} = \dfrac{\Sigma\vec{F}}{m}$



2. Μεθοδολογία κίνησης σε μη λείο οριζόντιο επίπεδο με την επίδραση ή όχι δύναμης $\vec{F}$

α. Χωρίς την επίδραση δύναμης $\vec{F}$.

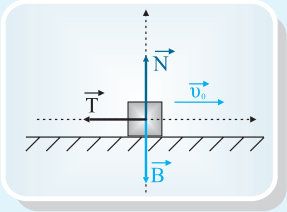
Στον άξονα yy΄ το σώμα ισορροπεί:

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = B \Rightarrow N = mg$ (1)

Στον άξονα xx΄ το σώμα θα εκτελέσει κίνηση ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη λόγω της τριβής. Για το μέτρο της επιβράδυνσης ισχύει:

$\Sigma F_x = m\alpha \Rightarrow T = m\alpha \Rightarrow \mu N = m\alpha$ και λόγω της (1)

$\mu mg = m\alpha \Rightarrow \alpha = \mu g$.



β. Με την επίδραση οριζόντιας δύναμης $\vec{F}$.

Άξονας yy΄: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = B \Rightarrow N = mg$ (1)

Άξονας xx΄:

$\Sigma F_x = m\alpha \Rightarrow F - T = m\alpha \Rightarrow F - \mu N = m\alpha \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$F - \mu mg = m\alpha$

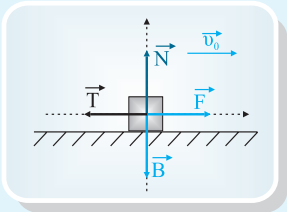
από όπου υπολογίζουμε την επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ της κίνησης.

Αν $F > T$ η κίνηση ομαλά επιταχυνόμενη

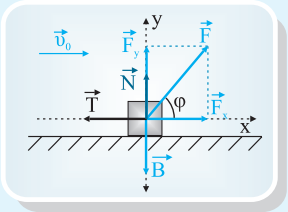
Αν $F = T$ η κίνηση ευθύγραμμη ομαλή

Αν $F < T$ η κίνηση ομαλά επιβραδυνόμενη.

(Αν το επίπεδο είναι λείο η $T = 0$)



γ. Με την επίδραση δύναμης $\vec{F}$ που σχηματίζει γωνία φ με το οριζόντιο επίπεδο προς τα πάνω.



Για τον άξονα yy΄ ισχύει:

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_y + N = B \Rightarrow N = mg - F\eta\mu\varphi$ (1) (πάντοτε από την σχέση ισορροπίας του άξονα yy΄ υπολογίζουμε την κάθετη αντίδραση $\vec{N}$).

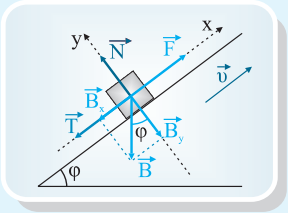
Για τον άξονα xx΄:

$\Sigma F_x = m\alpha \Rightarrow F_x - T = m\alpha \Rightarrow F\sigma\upsilon\nu\varphi - \mu N = m\alpha$ και λόγω της (1)

$F\sigma\upsilon\nu\varphi - \mu(mg - F\eta\mu\varphi) = m\alpha$ από όπου υπολογίζουμε την επιτάχυνση της κίνησης (ή την επιβράδυνση). (Αν το επίπεδο είναι λείο η $T = 0$)

3. Κίνηση σε μη λείο κεκλιμένο επίπεδο με την επίδραση της δύναμης $\vec{F}$ παράλληλης με το κεκλιμένο επίπεδο.

α. Κίνηση προς τα πάνω



Άξονας yy΄: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - B_y = 0 \Rightarrow$

$N = B_y \Rightarrow N = mg\sigma\upsilon\nu\varphi$ (1)

Άξονας xx΄: $\Sigma F_x = m\alpha \Rightarrow F - T - B_x = m\alpha \overset{(1)}{\Rightarrow}$

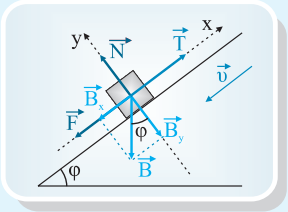
$F - \mu mg\sigma\upsilon\nu\varphi - mg\eta\mu\varphi = m\alpha$

Η αλγεβρική τιμή της $\vec{\alpha}$ εξαρτάται από το μέτρο των δυνάμεων $\vec{F}$, $\vec{B}_x$, $\vec{T}$. Αν $F = 0$ τότε

$m\alpha = \mu mg\sigma\upsilon\nu\varphi + mg\eta\mu\varphi \Rightarrow \alpha = \mu g\sigma\upsilon\nu\varphi + g\eta\mu\varphi$ (μέτρο της επιβράδυνσης).

(Αν το επίπεδο είναι λείο η $T = 0$)

β. Κίνηση προς τα κάτω $(\vec{F} \uparrow\uparrow \vec{\upsilon})$



Άξονας yy΄: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = B_y \Rightarrow N = mg\sigma\upsilon\nu$ (1)

Άξονας xx΄: $F\,F + B_x - T = m\alpha \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$F + mg\eta\mu\varphi - \mu mg\sigma\upsilon\nu = m\alpha$ (2)

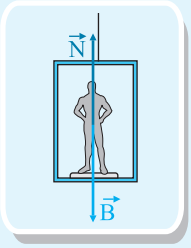
Η δύναμη $\vec{F}$ μπορεί να είναι αντίρροπη της ταχύτητας. (Αν το επίπεδο είναι λείο η $T = 0$)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΕΝΔΕΙΞΗΣ ΖΥΓΑΡΙΑΣ ΓΙΑ ΣΩΜΑ ΠΟΥ ΒΡΙΣΚΕΤΑΙ ΜΕΣΑ ΣΕ ΑΣΑΝΣΕΡ

α. Ασανσέρ ακίνητο ή ασανσέρ που κινείται με σταθερή ταχύτητα.

Ισχύει $\Sigma F = 0 \Rightarrow N - B = 0 \Rightarrow N = B$.

Η ζυγαριά θα δείχνει το βάρος του σώματος.

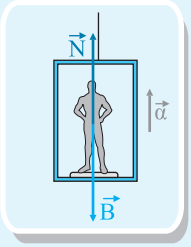


β. Ασανσέρ που ανεβαίνει με επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ (ή κατεβαίνει με επιβράδυνση $\vec{\alpha}$).

Ισχύει: $\Sigma F = m\alpha \Rightarrow N - B = m\alpha \Rightarrow N - mg = m\alpha$

$\Rightarrow N = mg + m\alpha$

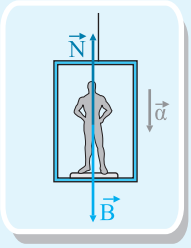
Η ένδειξη της ζυγαριάς είναι μεγαλύτερη από το βάρος του σώματος.



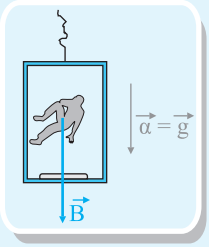
γ. Ασανσέρ που κατεβαίνει με επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ (ή ανεβαίνει με επιβράδυνση $\vec{\alpha}$).

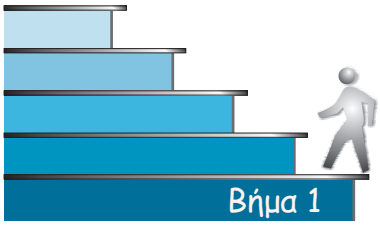
Ισχύει: $\Sigma F = m\alpha \Rightarrow B - N = m\alpha \Rightarrow N = mg - m\alpha = m(g - \alpha)$

Η ένδειξη της ζυγαριάς μικρότερη από το βάρος του σώματος.



Αν $\vec{\alpha} = \vec{g}$ τότε $N = 0$. Το σώμα θα εκτελεί ελεύθερη πτώση, με την επίδραση μόνο του βάρους του



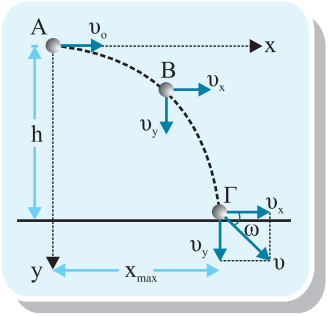


Μαθαίνουμε τις αποδείξεις

Απόδειξη 1

Ποια είναι η εξίσωση τροχιάς σώματος που κάνει οριζόντια βολή;

Η εξίσωση της τροχιάς σε μια βολή είναι μια σχέση μεταξύ των συντεταγμένων θέσης x και y, η οποία δεν περιλαμβάνει το χρόνο, και μας δίνει το είδος της τροχιάς του σώματος. Έτσι έχουμε:



$$\left.\begin{array}{l} x = \upsilon_0 \cdot t \\ y = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} t = \frac{x}{\upsilon_0} \\ y = \frac{1}{2} g \frac{x^2}{\upsilon_0^{\,2}} \end{array} \quad \text{ή} \quad y = \frac{g}{2\upsilon_0^{\,2}} x^2$$

Με τι ισούται ο χρόνος που χρειάζεται το σώμα να φτάσει στο έδαφος, στην οριζόντια βολή;

$$y = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad \text{ή} \quad h = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow 2h = g t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{2h}{g} \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Με τί ισούται το βεληνεκές στην οριζόντια βολή (μέγιστη οριζόντια μετατόπιση);

$$x_{max} = \upsilon_0 \cdot t \Rightarrow x_{max} = \upsilon_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Να υπολογιστεί η ταχύτητα με την οποία θα φτάσει το σώμα στο έδαφος, στην οριζόντια βολή:

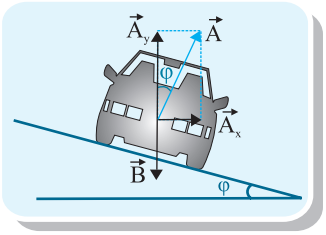
$$\left.\begin{array}{l} \upsilon_x = \upsilon_0 \\ \upsilon_y = g \cdot t \end{array}\right\}$$

η συνισταμένη των δύο ταχυτήτων είναι η ταχύτητα υ που έχει το σώμα στο έδαφος, δηλαδή έχει μέτρο: $\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^{\,2} + \upsilon_y^{\,2}} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\upsilon_0^{\,2} + g^2 t^2}$

κατεύθυνση: $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x}$

Απόδειξη 2

Από τι εξαρτάται η γωνία κλίσης του δρόμου, για την ασφαλή διέλευση οχήματος σε στροφή (σχέση γωνίας οδοστρώματος με τη γραμμική ταχύτητα);



Όταν ένα αυτοκίνητο κινείται πάνω σε κεκλιμένο ως προς το οριζόντιο επίπεδο δρόμο, η απαραίτητη κεντρομόλος δύναμη για την ασφαλή διέλευση του οχήματος εξαρτάται από την κλίση του δρόμου. Αν θεωρήσουμε αμελητέα την τριβή, στο όχημα ασκούνται δύο δυνάμεις:

το βάρος του $\vec{B}$ και η κάθετη δύναμη $\vec{A}$ από το οδόστρωμα.

Το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης ασκεί η συνιστώσα $\vec{A}_x$

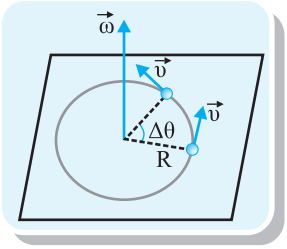
$$\left.\begin{array}{l} A_x = \dfrac{m\upsilon^2}{R} \Rightarrow A \cdot \eta\mu\varphi = \dfrac{m\upsilon^2}{R} \\ A_y = B \Rightarrow A\sigma\upsilon\nu\varphi = mg \end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} \varepsilon\varphi\varphi = \frac{\upsilon^2}{R \cdot g}$$

Φαίνεται ότι για ορισμένη κλίση του οδοστρώματος η διέλευση είναι ασφαλής μόνο για ορισμένη τιμή της ταχύτητας.

Απόδειξη 3

Να αποδείξετε ότι το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας στην ομαλή κυκλική κίνηση ισούται με:

$$\upsilon = \frac{2\pi R}{T}$$



Εάν ο χρόνος t είναι ο χρόνος μιας περιόδου T, τότε το μήκος του τόξου που διανύει το κινητό είναι ίσο με την περίμετρο του κύκλου S = 2πR.

Οπότε, ο τύπος $\upsilon = \dfrac{S}{t}$ γίνεται: $\upsilon = \dfrac{2\pi R}{T}$

Να αποδείξετε ότι το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας στην ομαλή κυκλική κίνηση ισούται με:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{ή} \quad \omega = 2\pi f$$

Σε χρόνο μιας περιόδου T η επιβατική ακτίνα θα έχει διαγράψει γωνία 2π rad, έτσι:

$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ μονάδα μέτρησης: rad / s

Επειδή $f = \dfrac{1}{T}$ ισχύει και $\omega = 2\pi f$

Να αποδειχθεί η σχέση μεταξύ συχνότητας f και περιόδου T:

Αν t = T τότε N = 1 κύκλο, άρα ο τύπος $f = \frac{N}{t}$ παίρνει τη μορφή $f = \frac{1}{T}$

Να αποδειχθεί η σχέση γραμμικής ταχύτητας υ και γωνιακής ταχύτητας ω του κινητού:

$$\left.\begin{array}{l} \upsilon = \frac{2\pi R}{T} \\ \omega = \frac{2\pi}{T} \end{array}\right\} \Rightarrow \upsilon = \omega \cdot R$$

Όλα τα σημεία ενός περιστρεφόμενου δίσκου ενώ έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$, έχουν γραμμικές ταχύτητες η τιμή των οποίων είναι ανάλογη με την απόσταση τους από τον άξονα (κέντρο) περιστροφής.

Να αποδειχθεί η σχέση γραμμικής ταχύτητας υ και συχνότητας περιστροφής f του κινητού:

Από τη σχέση: $\upsilon = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi R \frac{1}{T} \Rightarrow \upsilon = 2\pi R f$

Να αποδειχθεί η σχέση που συνδέει το κέντρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης $\vec{\alpha}_\kappa$ και της γωνιακής ταχύτητας.

Από τη σχέση: $\alpha_\kappa = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} \Rightarrow \alpha_\kappa = \omega^2 R$

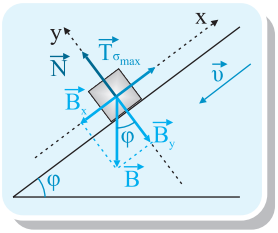
Να αποδειχθεί η σχέση που συνδέει την κεντρομόλο δύναμη και τη συχνότητα περιστροφής f:

Από τη σχέση: $F_\kappa = \frac{m\upsilon^2}{R} = \frac{m}{R}(2\pi R f)^2 = \frac{m \cdot 4\pi^2 R^2 f^2}{R} \Rightarrow F_\kappa = 4m\pi^2 R f^2$

Απόδειξη 4

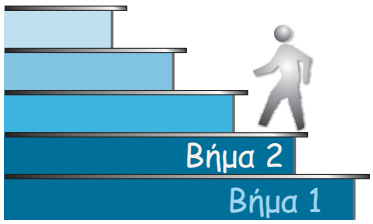
Να αποδειχθεί για τη γωνία τριβής φ ισχύει $\varepsilon\varphi = \mu_\sigma$

Είναι η ελάχιστη γωνία κεκλιμένου επιπέδου για την οποία ένα σώμα είναι έτοιμο να ολισθήσει με την επίδραση του βάρους του. Τη στιγμή που για την γωνία φ το σώμα είναι έτοιμο να ολισθήσει η στατική τριβή έχει πάρει τη μέγιστη τιμή της $T_\sigma = T_{\sigma max} = \mu_\sigma N$.



Θα ισχύει: $\Sigma F_x = 0$ (οριακά) $\Rightarrow B_x = T_{\sigma max} \Rightarrow$

$mg\eta\mu\varphi = \mu_\sigma N \Rightarrow mg\eta\mu\varphi = \mu_\sigma mg\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow \varepsilon\varphi = \mu_\sigma$. Η γωνία φ λέγεται γωνία τριβής.



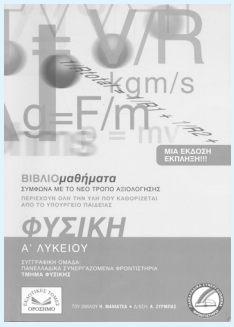
Επαναλαμβάνουμε τις ασκήσεις "κλειδιά"

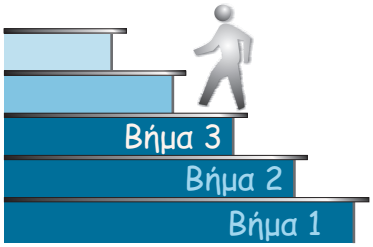
Α. Από το σχολικό βιβλίο ΦΥΣΙΚΗ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ έκδοση 2003.

σ.σ. 151 - 156: Ερωτήσεις 16, 17, 26, 28, 32, 33, 35, 41, 42, 44, 52, 53
σ.σ. 157 - 159: Ασκήσεις 3, 6, 7, 8, 12, 20, 22, 24

Β. Από τα Βιλιομαθήματα ΦΥΣΙΚΗ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ εκδόσεις "ΟΡΟΣΗΜΟ"

σ. 96: Ερωτήσεις 3, 4, 5, 6
σ. 98: Ασκήσεις 4, 5, 7, 8, 15, 18, 21
σ. 112: Ερωτήσεις 5, 6, 7, 8, 9
σ.σ. 113 - 115 : Ασκήσεις 4, 5, 10, 11
σ. 129: Ερωτήσεις 4, 5, 6, 7, 8, 10
σ.σ. 130 - 133: Ασκήσεις 4, 7, 10, 12, 14





Λύνουμε περισσότερες ασκήσεις

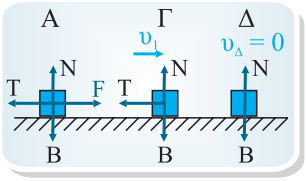
1. Σε κιβώτιο μάζας $m = 10kg$ που αρχικά ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο, ασκείται οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 100N$ για $t_1 = 5s$ και μετά η δύναμη καταργείται. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και επιπέδου είναι $\mu = 0,1$, να βρεθούν:

α. η ταχύτητα του σώματος τη στιγμή που καταργείται η δύναμη

β. ο ολικός κίνησης του σώματος

γ. το ολικό διάστημα που διανύει.

Δίνεται: $g = 10m/s^2$.



Λύση:

α. Διαδρομή ΑΓ Οι οριζόντιες δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα είναι η $\vec{F}$ και η $\vec{T}$. Από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha} \Rightarrow F - T = m\alpha \Rightarrow F - \mu \cdot N = m\alpha \Rightarrow F - \mu mg = m\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{F - \mu mg}{m}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = 9m/s^2 \text{ και } \upsilon_1 = \alpha_1 t_1 \Rightarrow \upsilon_1 = 9m/s^2 \cdot 5s = 45\,m/s$$

β. Στη διαδρομή ΓΔ η μόνη οριζόντια δύναμη είναι η $\vec{T}$.

Από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα υπολογίζουμε την επιτάχυνση (επιβράδυνση) $\vec{\alpha}_2$

$$\Sigma\vec{F}_x = \vec{m}\alpha_2 \Rightarrow -T = m(-\alpha_2) \Rightarrow \mu mg = m\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = 1m/s^2$$

Επειδή το σώμα σταματά στο Δ έχουμε:

$$\upsilon_\Delta = \upsilon_1 - \alpha_2 t_{\Gamma\Delta} \Rightarrow 0 = \upsilon_1 - \alpha_2 t_{\Gamma\Delta} \Rightarrow t_{\Gamma\Delta} = \frac{\upsilon_1}{\alpha_1} \Rightarrow t_{\Gamma\Delta} = 45s$$

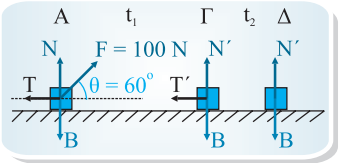
Οπότε $t_{ολ} = t_1 + t_{\Gamma\Delta} = 5s + 45s = 50s$

γ. Για το ολικό διάστημα που διανύει το σώμα έχουμε:

$$S_1 = \frac{1}{2}\alpha_1 t_1^2 \Rightarrow S_1 = \frac{1}{2} \cdot 9m/s^2 \cdot 5^2 s^2 \Rightarrow S_1 = 112,5m$$

$$S_{\Gamma\Delta} = \frac{\upsilon_1^2}{2\alpha_2} \Rightarrow S_{\Gamma\Delta} = 1012,5m \text{ οπότε } S_{ολ} = S_1 + S_{\Gamma\Delta} = 1125m$$

2. **Σώμα μάζας $m = 10\sqrt{3}kg$ κινείται με σταθερή ταχύτητα μέτρου $\upsilon = 20\,m/s$ σε οριζόντιο δρόμο με την επίδραση δύναμης μέτρου $F = 100N$ που σχηματίζει $\theta = 60^o$ με το οριζόντιο επίπεδο προς τα πάνω.**



Μετά από $t_1 = 10s$ η $\vec{F}$ καταργείται. Να βρεθούν:

α. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και επιπέδου

β. Ο χρόνος που θα σταματήσει το σώμα μετά την κατάργηση της δύναμης.

Δίνεται: $g = 10\,m/s^2$

Λύση:

α. Διαδρομή ΑΓ: Αναλύουμε την $\vec{F}$ σε δύο συνιστώσες $\vec{F}_x$ και $\vec{F}_y$ με μέτρα

$$F_x = F \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = 100N \cdot \frac{1}{2} = 50N \quad \text{και} \quad F_y = F \cdot \eta\mu\theta = 100N \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}N$$

Επειδή το σώμα κινείται με $\vec{\upsilon} = \sigma\tau\alpha\theta$.

Ισχύει: $\Sigma\vec{F}_x = \vec{0} \Rightarrow F_x - T = 0 \Rightarrow F_x = T \Rightarrow T = 50N$

Από την συνθήκη ισορροπίας στον κατακόρυφο άξονα έχουμε:

$$\Sigma\vec{F}_y = \vec{0} \Rightarrow F_y + N - B = 0 \Rightarrow$$

$$N = B - F_y \Rightarrow N = mg - F \cdot \eta\mu\theta \Rightarrow N = 50\sqrt{3}N$$

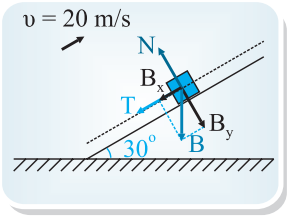
$$T = \mu N \Rightarrow \mu = \frac{T}{N} = \frac{50N}{50\sqrt{3}N} \Rightarrow \mu = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

β. Μετά την κατάργηση της $\vec{F}$ η μόνη οριζόντια δύναμη είναι η τριβή, η οποία επιβραδύνει και τελικά σταματά το σώμα

$$\Sigma\vec{F}_x = m\vec{\alpha} \Rightarrow -T' = m(-\alpha) \Rightarrow \alpha = \frac{T'}{m} \Rightarrow \alpha = \frac{10\sqrt{3}}{3} m/s^2$$

όπου $T' = \mu \cdot N' \Rightarrow T' = \mu \cdot mg \Rightarrow T' = 100N$ και $t_2 = \frac{\upsilon_0}{\alpha} \Rightarrow t_2 = 2\sqrt{3}s$

3. **Σώμα ρίχνεται από τη βάση κεκλιμένου επιπέδου κλίσης $\theta = 30^o$ με $\upsilon = 20\,m/s$. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και κεκλιμένου επιπέδου είναι $\mu = \frac{\sqrt{3}}{5}$ να βρεθούν:**



α. Η απόσταση που διανύει στο κεκλιμένο επίπεδο μέχρι να σταματήσει στιγμιαία.

β. Να εξεταστεί αν θα επιστρέψει στη βάση του κεκλιμένου και αν ναι , σε πόσο χρόνο και με ποια ταχύτητα.

(Δίνεται ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής σώματος και κεκλιμένου επιπέδου $\mu' = \frac{\sqrt{3}}{4}$ και $g = 10\,m/s^2$)

Λύση:

α. Η απόσταση που διανύει το σώμα μπορεί να βρεθεί ή με εφαρμογή του νόμου Νεύτωνα ή με το θεώρημα έργου ενέργειας. Γνωρίζουμε επίσης ότι: $B_y = mg\sigma\upsilon\nu\theta,\ B_x = mg\eta\mu\theta$

Οι δυνάμεις ασκούνται στη διεύθυνση κίνησης του σώματος είναι η $\vec{B}_x$ και $\vec{T}$ που επιβραδύνουν το σώμα, οπότε για το διάστημα που διανύει μέχρι να σταματήσει ισχύει: $s = \frac{\upsilon_0^2}{2|\alpha|}$ (1). $\left(\begin{array}{l}\text{Ισχύει στον } yy': \Sigma\vec{F}_y = 0 \Rightarrow N = B_y = mg\sigma\upsilon\nu\theta \\ T = \mu N \Rightarrow T = \mu mg\sigma\upsilon\nu\theta\end{array}\right)$

Ισχύει: $\Sigma\vec{F}_x = m\vec{\alpha} \Rightarrow -B_x - T = m(-\alpha) \Rightarrow mg\eta\mu\theta + \mu \cdot mg\sigma\upsilon\nu\theta = m\alpha \Rightarrow \alpha = 8\,m/s^2$

Από την (1) έχουμε: $s = \frac{\upsilon_0^2}{2|\alpha|} \Rightarrow S = 25m$.

β. Για να εξετάσουμε αν θα επιστραφεί στη βάση, σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα για να κινηθεί προς τα κάτω θα πρέπει:

$B_x > T_{\sigma\tau} \Rightarrow mg\eta\mu\theta > \mu_{\sigma\tau} mg\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow \eta\mu\theta > \mu_{\sigma\tau}\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{3}{8}$ που ισχύει άρα το σώμα επιστρέφει .

Έχουμε: $\Sigma F_x = m\alpha' \Rightarrow B_x - T = m\alpha' \Rightarrow \alpha' = \frac{B_x - T}{m} \Rightarrow \alpha' = 2\,m/s^2$

$S = \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot S}{\alpha}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 25m}{2m/s^2}} \Rightarrow t = 5s$ και $\upsilon_{\varepsilon\pi} = \alpha' t \Rightarrow \upsilon_{\varepsilon\pi} = 10\,m/s$

4. Σώμα αφήνεται στο σημείο Α κεκλιμένου επιπέδου σε ύψος $h = 1{,}25m$ και συνεχίζει την κίνησή του στο οριζόντιο επίπεδο σε απόσταση 10m (σημείο Γ) από τη βάση του κεκλιμένου. Να βρεθεί ο χρόνος κίνησης $t_{ΑΓ}$ (τα επίπεδα θεωρούνται λεία, $\varphi = 30^o$).

Λύση:

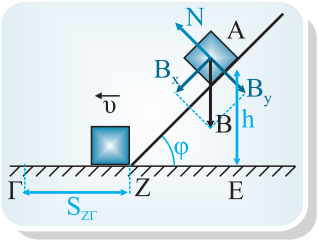
$\Sigma F_x = m\alpha \Rightarrow mg\eta\mu\varphi = m\alpha \Rightarrow \alpha = g\eta\mu\varphi \Rightarrow \alpha = 5\,m/s^2$

ΤΡΙΓ. ΑΕΖ: $ημφ = \frac{h}{AZ} \Rightarrow AZ = \frac{h}{ημφ} \Rightarrow S_{AZ} = AZ$

$S_{AZ} = \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow \frac{h}{ημφ} = \frac{1}{2} g \cdot ημφ \cdot t^2 \Rightarrow t_1 = 1s$

$\upsilon_Z = \alpha \cdot t_1 \Rightarrow \upsilon_Z = 5\,m/s$

ΖΓ: ευθύγραμμη ομαλή

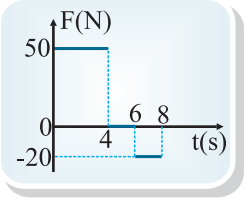


$S_{ZΓ} = \upsilon t_2 \Rightarrow t_2 = 2s$ και $t_{ολ} = t_1 + t_2 = 2s$

5. Σε σώμα $m = 2kg$ αρχικά ακίνητο σε λείο οριζόντιο επίπεδο ασκείται οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ της οποίας η αλγεβρική τιμή δείχνεται στο διάγραμμα:

α. Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 8s$

β. Να γίνει το διάγραμμα (υ, t)



Λύση:

α. $0 \to 4s$: Ασκείται στο σώμα σταθερή δύναμη μέτρου $F = 50N$ οπότε κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

$F = m\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{F}{m} \Rightarrow \alpha_1 = 25\,m/s^2$ και $\upsilon_1 = \alpha_1 t \Rightarrow \upsilon_1 = 100\,m/s$

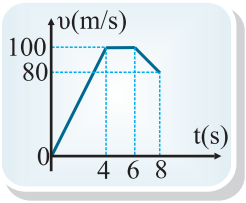
$4 \to 6s$: $F = 0$ και $\alpha_2 = 0$ άρα το σώμα κάνει ευθύγραμμη ομαλή με $\upsilon_2 = \upsilon_1 = 100\,m/s$

$6 \to 8s$: Ασκείται σταθερή δύναμη μέτρου $F = 20N$ αντίρροπη στην κίνησή του, οπότε το σώμα κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα $\upsilon_0 = \upsilon_2 = 100\,m/s$.

Άρα $F = m\alpha_3 \Rightarrow \alpha_3 = \frac{F}{m} \Rightarrow \alpha_3 = 10\,m/s^2$

και $\upsilon_3 = \upsilon_0 - \alpha_3 t \Rightarrow \upsilon_3 = 80\,m/s$ είναι η ταχύτητά του στο τέλος των 8s

β. Διάγραμμα (υ, t)



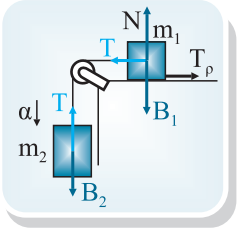
6. Όταν το σύστημα του σχήματος αφεθεί ελεύθερο να βρεθούν:

α. Το διάστημα που διανύει η m_1 σε 2s

β. Η ταχύτητα του m_2 σε 2s

γ. Η τάση του νήματος

Δίνονται: $m_1 = m_2 = 5kg$, $g = 10m/s^2$ και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης του m_1 με το δάπεδο $\mu = 0,25$. (Η τροχαλία θεωρείται αβαρής)



Λύση:

Εφαρμόζουμε το 2ο Νόμο του Νεύτωνα για κάθε σώμα χωριστά με τις δυνάμεις που φαίνονται στο σχήμα: για το m_1: $\Sigma F = m_1\alpha \Rightarrow T - T_\rho = m_1\alpha \Rightarrow T - \mu m_1 g = m_1\alpha \quad (1)$

$$\text{για το } m_2: \Sigma F = m_2\alpha \Rightarrow B_2 - T = m_2\alpha \Rightarrow m_2 g - T = m_2\alpha \quad (2)$$

$$(1)+(2) \Rightarrow m_2 g - \mu m_1 g = m_1\alpha + m_2\alpha \Rightarrow \alpha = 3,75\,m/s^2$$

α. Για το διάστημα που διανύει το m_1 σε $t = 2s$ έχουμε: $S_1 = \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow S_1 = 7,5\,m$

β. $\upsilon_2 = \alpha \cdot t \Rightarrow \upsilon_2 = 7,5\,m/s$

γ. $(1) \Rightarrow T = m_1\alpha + \mu m_1 g \Rightarrow T = 31,25N$

(Επειδή τα δύο σώματα συνδέονται με τεντωμένο νήμα κάθε στιγμή έχουν την ίδια ταχύτητα οπότε και οι μεταβολές των ταχυτήτων τους στη μονάδα του χρόνου είναι ίσες, άρα έχουν και ίσες επιταχύνσεις $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$)

7. Σ' έναν κυκλικό στίβο ακτίνας $R = \frac{200}{\pi}m$ ξεκινούν από το ίδιο σημείο δύο δρομείς Α και Β με ταχύτητες μέτρων $\upsilon_A = 3m/s$ και $\upsilon_B = 2m/s$ αντίστοιχα. Μετά από πόσο χρόνο θα συναντηθούν για τρίτη φορά όταν:

α. κινούνται με την ίδια φορά

β. κινούνται με αντίθετες φορές

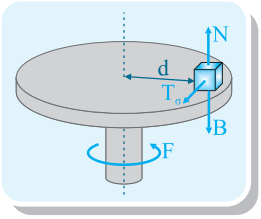
Λύση:

α. Οι δυο δρομείς όταν θα συναντηθούν για πρώτη φορά θα έχουν διατρέξει διαστήματα: $S_A = \upsilon_A \cdot t = 3t$, $S_B = \upsilon_B \cdot t = 2t$ αλλά ο πρώτος που έχει μεγαλύτερη ταχύτητα θα έχει διαγράψει ένα κύκλο ($2\pi R$) περισσότερο. Έτσι μετά από την τρίτη φορά θα έχει διαγράψει τρεις κύκλους περισσότερους, δηλ.

$$S_A = S_B + 3(2\pi R) \Rightarrow 3t = 2t + 6\pi\frac{200}{\pi}s \Rightarrow t = 1200s$$

β. Όταν κινούνται με αντίθετες φορές έχουν διαγράψει έναν κύκλο για κάθε φορά που συναντιώνται. $S_A + S_B = 3(2\pi R) \Rightarrow 3t + 2t = 6\pi\frac{200}{\pi}s \Rightarrow t = 240s$

8. Ο οριζόντιος δίσκος του σχήματος περιστρέφεται με συχνότητα $f = 0,1Hz$. Για να ισορροπεί ένα σώμα πάνω στο δίσκο, πρέπει να υπάρχει τριβή μεταξύ τους. Αν $\mu_\sigma = 0,2$ να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει η απόσταση d, ώστε το σώμα να ισορροπεί πάνω στο δίσκο. Δίνονται $g = 10m/s^2$ και $\pi^2 = 10$.



Λύση:

Για να ισορροπεί το σώμα πρέπει να υπάρχει στατική τριβή η οποία να παίζει το ρόλο της απαραίτητης κεντρομόλου δύναμης.

Ισορροπεί όταν: $T_{\sigma max} \geq F_\kappa \Rightarrow \mu_\sigma \cdot mg \geq \frac{m\upsilon^2}{d} \Rightarrow$

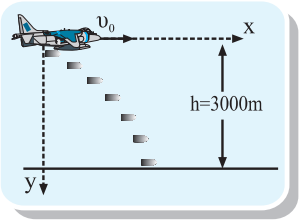
$$\mu_\sigma \cdot mg \geq 4\pi^2 f^2 dm \Rightarrow d \leq \frac{\mu_\sigma g}{4\pi^2 f^2} \text{ ή } d \leq 5m$$

9. Ένα βομβαρδιστικό αεροπλάνο ενώ πετάει οριζόντια με ταχύτητα 275 m/s ως προς το έδαφος σε ύψος 3000m πάνω από μια επίπεδη επιφάνεια, ρίχνει μια βόμβα.

α. Σε ποια οριζόντια απόσταση από τη θέση από την οποία αφέθηκε, η βόμβα θα προσκρούσει στο έδαφος.

β. Αν το αεροπλάνο διατηρεί την αρχική του ταχύτητα και πορεία, που θα βρίσκεται κατά τη στιγμή που η βόμβα θα προσκρούσει στο έδαφος;

Δίνεται: $g = 10m/s^2$



Λύση:

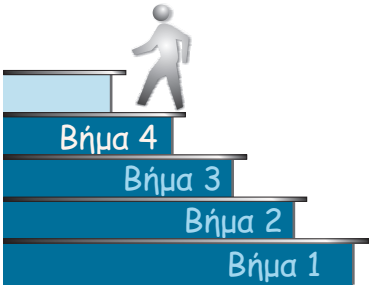
α. Ο χρόνος πτώσης της βόμβας είναι: $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3000m}{10m/s^2}} \Rightarrow t = 24,5s$

η οριζόντια μετατόπιση της βόμβας είναι:

$x = \upsilon_0 t \Rightarrow x = 275m/s \cdot 24,5s \Rightarrow x = 6737,5m$

β. Η κίνηση του αεροπλάνου είναι ευθύγραμμη ομαλή, οπότε σε χρόνο $t = 24,5s$ θα έχει διανύσει απόσταση $x_{\alpha\varepsilon\rho} = \upsilon_0 t \Rightarrow x_{\alpha\varepsilon\rho} = 275m/s \cdot 24,5s \Rightarrow x_{\alpha\varepsilon\rho} = 6737,5m$ ίση με το βεληνεκές της βόμβας.

Βρίσκεται κατακόρυφα πάνω απ' το σημείο στο οποίο προσέκρουσε η βόμβα.



Λύνουμε μόνοι μας

1. Σώμα $m = 2kg$ ξεκινά να ανέρχεται από τη βάση κεκλιμένου επιπέδου κλίσης θ με $ημθ = 0,6$ και $συνθ = 0,8$ με επίδραση οριζόντιας δύναμης $F = 100N$. Αν $\mu = 0,1$ να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος όταν αυτό έχει διανύσει 10m στο κεκλιμένο.

2. Σώμα μάζας $m = 1kg$ είναι αρχικά ακίνητο σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,1$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ στο σώμα ασκούνται δύο οριζόντιες δυνάμεις κάθετες μεταξύ τους με μέτρα $F_1 = 8N$ και $F_2 = 6N$. Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος στο οριζόντιο επίπεδο μετά από 4 sec καθώς και το διάστημα που έχει διανύσει στη διάρκεια του 4ου sec της κίνησής του.

3. Από τη βάση κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης $\varphi = 30^o$, εκτοξεύεται προς τα πάνω ένα σώμα με αρχική ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 = 32 m/s$. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ του σώματος και του επιπέδου είναι $\mu = \sqrt{3}/5$

α. Να υπολογιστεί το διάστημα που θα διανύσει το σώμα μέχρι να σταματήσει στιγμιαία.

β. Θα επιστρέψει το σώμα στη βάση;

γ. Αν ναι με τι ταχύτητα;

4. Σώμα μάζας m περνάει από σημείο Α λείου οριζόντιου επιπέδου με ταχύτητα υ_0 και διανύει 4 m στο οριζόντιο επίπεδο σε $t = 1s$. Στη συνέχεια συναντά λείο κεκλιμένο επίπεδο κλίσης $\theta = 30^o$ στο οποίο αρχίζει να ανεβαίνει. Να βρεθεί ο συνολικός χρόνος για να περάσει το σώμα για δεύτερη φορά από το σημείο Α του οριζόντιου επιπέδου (με αντίθετη ταχύτητα).

5. Σε σώμα $m = 5kg$ που αρχικά ηρεμεί σε οριζόντιο δάπεδο ασκείται δύναμη μέτρου $F = 30N$ που σχηματίζει $\theta = 45^o$ προς τα πάνω με το οριζόντιο επίπεδο. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι $\mu = 0,2$ και η F ασκείται για $t = 3s$ και μετά καταργείται να βρεθούν:

α. Η ταχύτητα του σώματος τη στιγμή που καταργείται η δύναμη.

β. Ο συνολικός χρόνος κίνησης του σώματος μέχρι να σταματήσει.

γ. Να γίνουν τα διαγράμματα υ(t) και α(t).

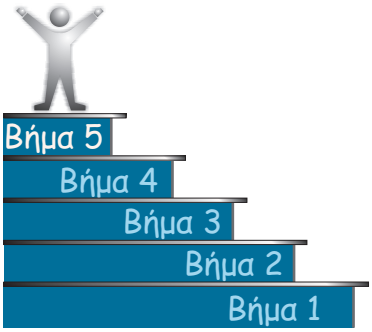
6. Αεροπλάνο κινείται οριζόντια σε ύψος $h = 320m$ από το έδαφος με ταχύτητα $\upsilon_0 = 100m/s$. Στο έδαφος κινείται ομόρροπα στην ίδια διεύθυνση άρμα με ταχύτητα $\upsilon_1 = 10m/s$. Να βρείτε από ποια οριζόντια απόσταση s από το άρμα πρέπει ο πιλότος να αφήσει μια βόμβα ώστε αυτή να χτυπήσει το άρμα. Δίνεται $g = 10m/s^2$.

7. Ένα μικρό σφαιρίδιο μάζας m κρέμεται από μη εκτατό νήμα μήκους L. Το σφαιρίδιο περιστρέφεται ομαλά κυκλικά σε οριζόντιο επίπεδο κατά τρόπο που το νήμα να διαγράφει περιφέρεια κώνου. Η γωνία που σχηματίζει το νήμα με την κατακόρυφο είναι θ. Να βρεθούν:

α. το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σφαιριδίου

β. η περίοδος περιστροφής του σφαιριδίου.

8. Σε ένα ρολόι ο ωροδείκτης και ο λεπτοδείκτης δείχνει τη 12η ώρα ακριβώς. Μετά από πόσο χρόνο οι δείκτες θα σχηματίσουν για πρώτη φορά γωνίες $\frac{\pi}{2}$, π και 2π.



Ελέγχουμε τις γνώσεις μας

Θέμα 1ο

1. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές:

α. Η στατική τριβή, μεταξύ δύο επιφανειών, είναι σταθερή

β. Η τριβή ολίσθησης είναι ανάλογη του βάρους

γ. Η τριβή ολίσθησης έχει πάντα αντίθετη κατεύθυνση από την κατεύθυνση της κίνησης του σώματος πάνω στο οποίο δρά.

2. Σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση

α. Το διάνυσμα της κεντρομόλου δύναμης είναι σταθερό

β. Η συνισταμένη των δυνάμεων που σκούνται σ' αυτό ισούται με την κεντρομόλο δύναμη.

γ. Το διάνυσμα της επιτάχυνσης είναι σταθερό

δ. Το διάνυσμα της ταχύτητας είναι σταθερό.

3. Ένα μικρό σώμα αφήνεται από αερόστατο που πετά οριζόντια σε ύψος h. Τη στιγμή που αφήνεται το σώμα έχει ταχύτητα ίδιου μέτρου με την ταχύτητά του..... Η κίνηση του είναι σύνθεση δύο κινήσεων. Μιας η οποία εξελίσσεται σε οριζόντια διεύθυνση και είναι ..... και μιας που εξελίσσεται σε κατακόρυφη διεύθυνση και είναι.....

4. Χαρακτηρίστε με (Σ) τις σωστές προτάσεις και με (Λ) τις λανθασμένες:

α. Το μέτρο της ταχύτητας στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση είναι σταθερό, ενώ στην ομαλή κυκλική μεταβάλλεται.

β. Το διάνυσμα της ταχύτητας στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση είναι σταθερό, ενώ στην ομαλή κυκλική μεταβάλλεται.

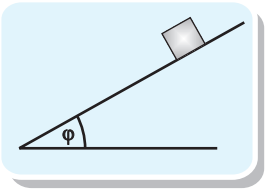
γ. Το μέτρο της επιτάχυνσης στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση είναι σταθερό ενώ στην ομαλή κυκλική μεταβάλλεται.

δ. Το διάνυσμα της επιτάχυνσης στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση είναι σταθερό ενώ στην ομαλή κυκλική μεταβάλλεται.

5. Αντιστοιχίστε τα στοιχεία της αριστερής με αυτά της δεξιάς στήλης.

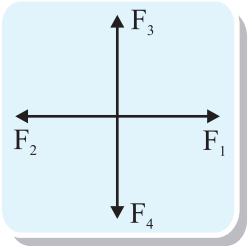
α. ω	**i.** 1m / s
β. υ	**ii.** 1 Hz
γ. α_κ	**iii.** m/s^2
δ. f	**iv.** s
ε. T	**v.** 1 rad / s

Θέμα 2ο



α. Αποδείξτε τη σχέση της γραμμικής με την γωνιακή ταχύτητα

β. Μεταβάλλοντας την κλίση του μη λείου κεκλιμένου επιπέδου, για κάποια γωνία φ, το σώμα αρχίζει να κατέρχεται ισοταχώς. Πως μπορούμε να υπολογίσουμε το συντελεστή τριβής ολίσθησης μ, αν είναι γνωστή η εφφ.



γ. Για τις δυνάμεις του σχήματος $F_1 = 20N$, $F_2 = 12N$, $F_3 = 16N$, $F_4 = 10N$, το μέτρο της συνισταμένης τους είναι:

i. 14N, **ii.** 2N, **iii.** 10N, **iv.** 58N

Θέμα 3ο

α. Να υπολογισθούν η περίοδος και η συχνότητα του δευτερολεπτοδείκτη, του λεπτοδείκτη και του ωροδείκτη.

β. Κάποια στιγμή το ρολόι δείχνει 12 το μεσημέρι. Μετά από πόση ώρα ο δευτερολεπτοδείκτης και ο λεπτοδείκτης σχηματίζουν γωνία π rad για πρώτη φορά;

Θέμα 4ο

Σώμα μάζας $m = 1kg$ ηρεμεί σε οριζόντιο δάπεδο με το οποίο έχει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,5$. Στο σώμα ασκείται δύναμη $F = 10N$ για χρονικό διάστημα $t_1 = 2s$, που σχηματίζει γωνία φ με τον ορίζοντα, προς τα πάνω, ώστε $ημφ = 0,6$ και $συνφ = 0,8$. Η δύναμη μετά καταργείται. Να υπολογίσετε:

α. τον ολικό χρόνο κίνησης μέχρι το σώμα να σταματήσει.

β. την ολική μετατόπιση του σώματος μέχρι να σταματήσει.

Δίνεται $g = 10\,m/s^2$.

Κεφάλαιο 4ο

Νόμος Παγκόσμιας Έλξης
Πεδίο Βαρύτητας

Ο μαθητής που έχει μελετήσει το κεφάλαιο νόμος παγκόσμιας έλξης, πεδίο βαρύτητας πρέπει:

- ✓ Να μπορεί να διατυπώσει τον Νόμο της παγκόσμιας έλξης.
- ✓ Να γνωρίζει την έννοια βαρυτικό πεδίο και τι ισχύει για αυτό.
- ✓ Να ξέρει την ένταση του βαρυτικού πεδίου, την εξίσωσή της και από τι εξαρτάται.
- ✓ Να γνωρίζει από τι εξαρτάται η κίνηση των δορυφόρων, να αποδείξει την ταχύτητα ενός γήϊνου δορυφόρου και την περίοδο.
- ✓ Να γνωρίζει ποιος δορυφόρος λέγεται σύγχρονος.
- ✓ Να ξέρει τι ισχύει στις συνθήκες έλλειψης βαρύτητας.

Τυπολόγιο 4ου Κεφαλαίου

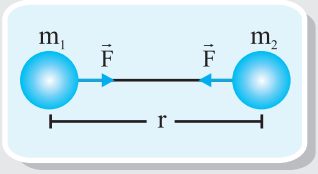
Βαρύτητα
Ν. παγκόσμιας έλξης $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$
Ένταση βαρυτικού πεδίου της Γης $g = \frac{F}{m} = \frac{B}{m} = G\frac{M_Γ}{r^2}$, όπου $r = R_Γ + h$
$GM_Γ = g_0 \cdot R_Γ{}^2$
Κίνηση δορυφόρων $\upsilon = \sqrt{\frac{GM_Γ}{r}}$, $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{g_0 \cdot R_Γ{}^2}}$
Πυκνότητα: $d = \frac{M}{V}$. Ο όγκος σφαίρας ακτίνας R: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Νόμος παγκόσμιας έλξης: Τύποι - Βασικές έννοιες

Διατυπώστε τον νόμο της παγκόσμιας έλξης.

- **Βαρυτικές δυνάμεις**

  Όταν δύο σώματα με μάζες m_1 και m_2 βρίσκονται σε απόσταση r, οπουδήποτε στο Σύμπαν, τότε το ένα σώμα ασκεί στο άλλο μια ελκτική δύναμη (παγκόσμια έλξη), η οποία:
- Είναι ανάλογη του γινομένου των δύο μαζών και
- Είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της μεταξύ τους απόστασης (Νόμος Παγκόσμιας Έλξης)



Μέτρο: $F = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$

Διεύθυνση: την ευθεία που ενώνει τα κέντρα των δύο μαζών

G: σταθερά παγκόσμιας έλξης $\left(G = 6,67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2/kg^2\right)$ δεν εξαρτάται από τις μάζες των σωμάτων ούτε από το μέσο που τις περιβάλλει.

- Οι βαρυτικές δυνάμεις με τις οποίες αλληλεπιδρούν τα δύο σώματα είναι αντίθετες, έχουν μεταξύ τους σχέση δράσης - αντίδρασης.

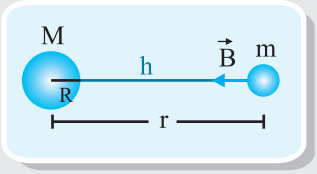
Τι γνωρίζεται για το βάρος του σώματος;

- **Βάρος σώματος**

Η ελκτική δύναμη, που δέχεται ένα σώμα μάζας m από τη Γη, που βρίσκεται σε ύψος h από την επιφάνειά της, (παγκόσμια έλξη) ονομάζεται βάρος B του σώματος με χαρακτηριστικά:

Μέτρο: $B = G\dfrac{M \cdot m}{r^2}$, όπου $r = R + h$,

M = μάζα Γης,
m = μάζα σώματος
R = ακτίνα Γης

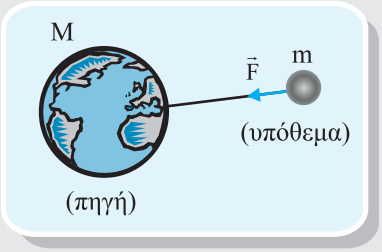


Διεύθυνση: την ευθεία που ενώνει τα κέντρα των δύο μαζών (κατακόρυφη)
Φορά: προς το κέντρο της Γης.

Ποιο πεδίο λέγεται βαρυτικό και τι ισχύει σ' αυτό;

- **Βαρυτικό πεδίο**

Με τον όρο βαρυτικό πεδίο εννοούμε το χώρο γύρω από μία οποιαδήποτε μάζα M, ο οποίος έχει την ιδιότητα να ασκεί δύναμη (ελκτική) σε κάθε άλλη μάζα m, που θα βρεθεί στο χώρο αυτό. Τη μάζα M, στην οποία αποδίδουμε τη δημιουργία του πεδίου, την ονομάζουμε πηγή του πεδίου και την m, που δέχεται τη δύναμη, υπόθεμα.

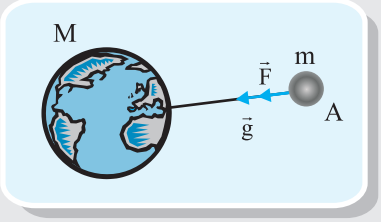


Αν ως πηγή του πεδίου θεωρήσουμε τη μάζα της Γης, ο χώρος γύρω από αυτήν ονομάζεται βαρυτικό πεδίο της Γης. Η δύναμη που δέχεται κάθε σώμα που θα βρεθεί στο χώρο αυτό, είναι το βάρος του σώματος. Επειδή τα σώματα αλληλεπιδρούν και η μάζα m θα ασκεί δύναμη αντίθετη στη Γη.

Ορισμός έντασης στο βαρυτικό πεδίο της γης.

- **Ένταση g στο βαρυτικό πεδίο της Γης**

Αν θεωρήσουμε ένα σημείο A σε απόσταση r από το κέντρο της Γης και σ' αυτό φέρουμε διαδοχικά μάζες m, 2m, 3m .... τότε η βαρυτική έλξη σύμφωνα με τη σχέση $F = G\dfrac{M \cdot m}{r^2}$ θα έχει μέτρο αντίστοιχα F, 2F, 3F .... Συμπε-



ραίνουμε ότι το πηλίκο $\frac{\text{δύναμη}}{\text{υπόθεμα}}$ παραμένει σταθερό.

Κάθε σημείο του βαρυτικού πεδίου της Γης χαρακτηρίζεται από το σταθερό πηλίκο $\frac{\vec{F}}{m}$, το οποίο ονομάζεται ένταση $\vec{g}$ του βαρυτικού πεδίου $\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$.

Έχει κατεύθυνση ίδια με αυτή της δύναμης

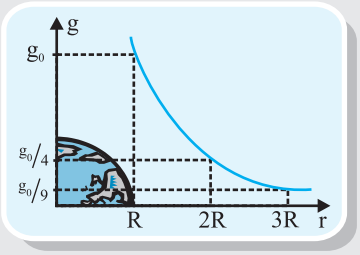
Μονάδα μέτρησης: $1\ N/kg$ ή $1\ m/s^2$.

Από τι εξαρτάται η ένταση του βαρυτικού πεδίου και πώς μεταβάλλεται το μέτρο της;

Η τιμή της έντασης $\vec{g}$ του πεδίου βαρύτητας:

- είναι ανεξάρτητη του υποθέματος
- εξαρτάται από το ύψος h πάνω από την επιφάνεια της Γης, όσο μεγαλώνει το ύψος h το μέτρο έντασης $\vec{g}$ μικραίνει.
- εξαρτάται από το γεωγραφικό πλάτος, όσο απομακρυνόμαστε από τον Ισημερινό προς τους πόλους, το μέτρο της έντασης $\vec{g}$ μεγαλώνει, γιατί η Γη δεν είναι τελείως σφαιρική.
- Στην επιφάνεια της Γης η τιμή της έντασης του πεδίου βαρύτητας της Γης γίνεται: $g_0 = G\frac{M}{R^2}$ απ' όπου παίρνουμε: $g_0R^2 = G \cdot M$
- Το μέτρο της έντασης $\vec{g}$ μεταβάλλεται με την απόσταση r από το κέντρο της Γης όπως φαίνεται στο διάγραμμα.

$$g = \frac{GM}{r^2}\ ,\quad r \geq R$$



Τι γνωρίζουμε για την κίνηση των δορυφόρων.

- **Η κίνηση των δορυφόρων**

Κάθε πλανήτης που περιφέρεται γύρω από τον Ήλιο, λέμε ότι είναι φυσικός του δορυφόρος. Με την έννοια αυτή, φυσικός δορυφόρος της Γης είναι η Σελήνη ή φυσικός δορυφός του Δία είναι το ουράνιο σώμα Ιώ.

Πέρα όμως από τους φυσικούς δορυφόρους, ο άνθρωπος κατόρθωσε να θέσει

σε κυκλικές τροχιές, κυρίως γύρω από τη Γη, σώματα που τα αποκαλούμε τεχνητούς δορυφόρους της Γης.
Κάθε σώμα το οποίο περιφέρεται με σταθερή τροχιά γύρω από τη Γη και η μόνη δύναμη που δέχεται είναι η δύναμη βαρύτητας, το ονομάζουμε δορυφόρο της Γης.

Ποιος δορυφόρος λέγεται σύγχρονος;

- ***Σύγχρονος*** ονομάζεται ο δορυφόρος που βρίσκεται συνεχώς πάνω από το ίδιο σημείο του ισημερινού. Τότε: $T = 24h = 86400s$. Από την (1) έχουμε: $r \simeq 42600km$

Σχέση ακτίνας, περιφοράς και περιόδου δορυφόρου.

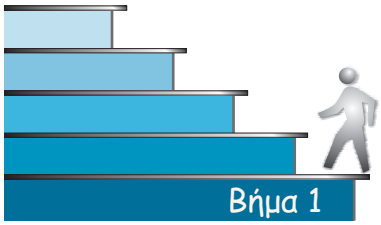
- Όσο μεγαλώνει η ακτίνα περιφοράς ενός δορυφόρου, τόσο μεγαλώνει και η περίοδός του, δηλαδή, σε μεγάλα ύψη από την επιφάνεια της Γης, χρειάζεται περισσότερο χρόνο για να κάνει μια περιφορά, π.χ. ο διαστημικός σταθμός έχει περίοδο $T = 90\,min$.

Πώς θέτουμε δορυφόρους σε τροχιά;

- Έστω ότι θέλουμε να θέσουμε ένα σώμα σε τροχιά γύρω από τη Γη, θέλουμε δηλαδή να το κάνουμε δορυφόρο της σε ύψος h. Ακολουθούμε την διαδικασία:
  α. με βοήθεια πυραύλων φέρνουμε το σώμα σε ύψος h.
  β. με βοήθεια βοηθητικών πυραύλων (προγραμματιζόμενων από τη Γη) δίνουμε στο σώμα κατάλληλη ώθηση, ώστε τελικά να αποκτήσει ταχύτητα κάθετη στη βαρυτική έλξη $(\vec{B} \perp \vec{\upsilon})$ και με μέτρο $\upsilon = \sqrt{\dfrac{GM_{\Gamma}}{R_{\Gamma} + h}} = \sqrt{\dfrac{g_0 R_{\Gamma}^2}{R_{\Gamma} + h}}$.

Ποιες συνθήκες λέγονται συνθήκες έλλειψης βαρύτητας;

- **Συνθήκες έλλειψης βαρύτητας**
  Ο δορυφόρος και όλα τα σώματα που βρίσκονται μέσα σε αυτόν δέχονται δύναμη βαρύτητας λόγω του πεδίου βαρύτητας της Γης. Παρ' όλα αυτά όμως τα σώματα αιωρούνται, δηλαδή αν τα ζυγίσουμε με δυναμόμετρο, η ένδειξη του δυναμόμετρου είναι μηδέν.

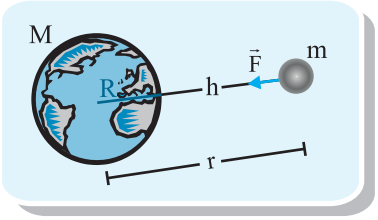


Μαθαίνουμε τις αποδείξεις

Απόδειξη 1

Σχέση έντασης στο βαρυτικό πεδίο.

Θεωρούμε ένα σώμα μάζας m σε μικρό ύψος h πάνω από την επιφάνεια της Γης. Η τιμή της έντασης $\vec{g}$ του πεδίου βαρύτητας της Γης στο σημείο αυτό έχει μέτρο:

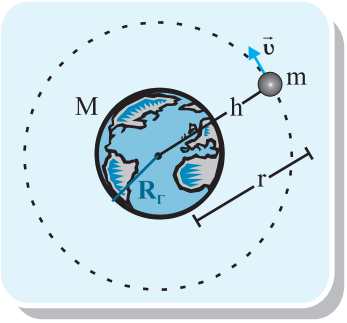


$$g = \frac{F}{m} = \frac{G\frac{M \cdot m}{r^2}}{m} = G\frac{M}{r^2} \text{ ή } g = G\frac{M}{(R+h)^2}$$

Απόδειξη 2

Με τι ισούται η ταχύτητα δορυφόρου σε κυκλική τροχιά;

Η ελκτική δύναμη (παγκόσμια έλξη) που δέχεται ο δορυφόρος από τη Γη (ή από κάθε άλλο πλανήτη) έχει το ρόλο κεντρομόλου δύναμης, δηλαδή:



$$B = F_\kappa \Rightarrow G\frac{M \cdot m}{r^2} = \frac{m\upsilon^2}{r}, \text{ όπου } r = R + h$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{GM}{r}} \text{ ή } \upsilon = \sqrt{\frac{g_0 R^2}{(R+h)}}.$$

- Η ταχύτητα ενός δορυφόρου είναι ανεξάρτητη της μάζας m του δορυφόρου εξαρτάται μόνο από την ακτίνα περιφοράς του, δηλαδή όλοι οι δορυφόροι που κινούνται σε κυκλικές τροχιές ίδιας ακτίνας, έχουν την ίδια ταχύτητα.
- Όσο πιο μακρυά από τη Γη περιφέρεται ένας δορυφόρος της, τόσο πιο μικρή είναι η ταχύτητά του.

Απόδειξη 3

Με τι ισούται η περίοδος δορυφόρου σε κυκλική τροχιά;

Η ταχύτητα με την οποία περιφέρεται ένας δορυφόρος γύρω από τη Γη αποδείχθηκε ότι είναι: $\upsilon = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{GM}{(R+h)}}$

Η κίνηση του δορυφόρου είναι ομαλή κυκλική, έτσι είναι γνωστή η σχέση:

$T = \frac{2\pi r}{\upsilon} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GM}{r}}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^2}{\frac{GM}{r}}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$ και αν $g_0R^2 = GM$ τότε

$T = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{r^3}{g_0}}$ (1).

Απόδειξη 4

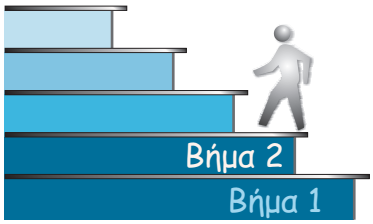
Πώς εξηγούνται οι συνθήκες έλλειψης βαρύτητας;

Οι συνθήκες αυτές που επικρατούν μέσα στο δορυφόρο λέγονται "συνθήκες έλλειψης βαρύτητας" και εξηγούνται ως εξής:

Ο δορυφόρος και κάθε σώμα βάρους $\vec{B}$ κάνει ομαλή κυκλική υπό την επίδραση της δύναμης βαρύτητας και με κεντρομόλο επιτάχυνση $\vec{\alpha}_\kappa = \vec{g}$. Έτσι αν σ' ένα σώμα ασκείται δύναμη βαρύτητας $\vec{B}$ και η $\vec{F}$ του δυναμόμετρου, ισχύει:

$B - F = F_\kappa \Rightarrow mg - F = m \cdot \alpha_\kappa \Rightarrow F = mg - m\alpha_\kappa \Rightarrow F = m\alpha_\kappa - m\alpha_\kappa \Rightarrow F = 0$.

Όταν ένα σώμα βρίσκεται μέσα στο δορυφόρο, φαινομενικά το βάρος του είναι μηδέν, δηλαδή το σώμα βρίσκεται σε "συνθήκες έλλειψης βαρύτητας".



Επαναλαμβάνουμε τις ασκήσεις “κλειδιά”

Α. Από το σχολικό βιβλίο ΦΥΣΙΚΗ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ έκδοση 2003.

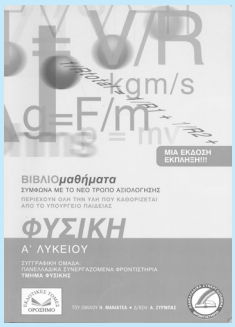
σ.σ. 187 - 189: Ερωτήσεις 4, 5, 6, 13, 14, 17

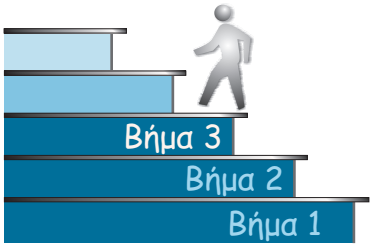
σ.σ. 191 - 192: Ασκήσεις 6, 8, 10, 11, 12

Β. Από τα Βιλιομαθήματα ΦΥΣΙΚΗ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ εκδόσεις “ΟΡΟΣΗΜΟ”

σ.σ. 142 - 147: Παραδείγματα 2, 3, 6, 8

σ.σ. 148 - 150: Προτεινόμενα θέματα 4, 5, 11, 12, 16



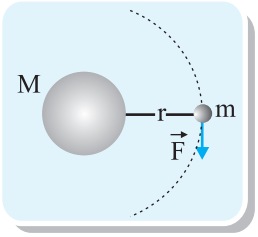


Λύνουμε περισσότερες ασκήσεις

1. Ένας πλανήτης μάζας m κινείται γύρω από τον Ήλιο που έχει μάζα M, διαγράφοντας με γωνιακή ταχύτητα ω κυκλική τροχιά ακτίνας r. Να δείξετε ότι η γωνιακή ταχύτητα είναι ανεξάρτητη από τη μάζα του πλανήτη.

Λύση:

Η ελκτική δύναμη λόγω Παγκόσμιας Έλξης έχει το ρόλο κεντρομόλου δύναμης για να εκτελέσει ο πλανήτης κυκλική κίνηση, δηλαδή:



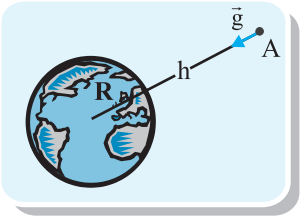
$$F = F_\kappa \Rightarrow G\frac{Mm}{r^2} = \frac{m\upsilon^2}{r} \Rightarrow G\frac{M}{r} = (\omega r)^2$$

$$\Rightarrow G\frac{M}{r} = \omega^2 r^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{GM}{r^3} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$$

ανεξάρτητη της μάζας m του πλανήτη

2. Να βρείτε το μέτρο της βαρυτικής επιτάχυνσης σε ύψος $h = 3R$ από την επιφάνεια της γης. Δίνεται το μέτρο της βαρυτικής επιτάχυνσης στην επιφάνεια της Γης $g_0 = 10\ m/s^2$.

Λύση:



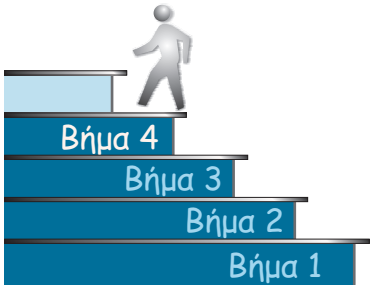
Το σημείο Α βρίσκεται σε απόσταση $r = R + h = R + 3R = 4R$ από το κέντρο της Γης.

Στο σημείο Α η βαρυτική επιτάχυνση

$$g_A = G\frac{M}{r^2} = G\frac{M}{(4R)^2} = G\frac{M}{16 \cdot R^2} = \frac{1}{16}G\frac{M}{R^2}.$$

Είναι γνωστό όμως $g_0 = G\frac{M}{R^2}$ οπότε $g_A = \frac{1}{16}g_0$ ή

$$g_A = \frac{1}{16}10\ m/s^2 = 1{,}25\ m/s^2$$



Ελέγχουμε τις γνώσεις μας

1. Διαστημόπλοιο πλησιάζει τον πλανήτη Άρη, ο οποίος έχει ένα δορυφόρο. Ο αστροναύτης που βρίσκεται μέσα στο διαστημόπλοιο γνωρίζει την ακτίνα R_A του Άρη και μετρά την ακτίνα περιφοράς r του δορυφόρου καθώς και την περίοδο του T. Να δείξετε ότι:

α. Η μάζα του Άρη δίνεται $M_A = \dfrac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$ ενώ

β. το μέτρο της βαρυτικής επιτάχυνσης στην επιφάνειά του δίνεται

$$g_A = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2 R_A^2}.$$

2. Εάν η μάζα της Σελήνης είναι $7{,}343 \cdot 10^{22}\,\text{kg}$ και η ακτίνα της 1741 km, να υπολογισθεί η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Σελήνης (Δίνεται $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\text{Nm}^2/\text{kg}^2$)

Κεφάλαιο 5ο

Διατήρηση της ορμής

Ο μαθητής που έχει μελετήσει το κεφάλαιο διατήρησης της ορμής πρέπει:

- ✓ Να γνωρίζει ποιες δυνάμεις λέγονται εσωτερικές και ποιες εξωτερικές ενός συστήματος σωμάτων.
- ✓ Να γνωρίζει ποιο σύστημα λέγεται μονωμένο.
- ✓ Να γνωρίζει τι είναι ορμή σώματος.
- ✓ Να διατυπώνει την Αρχή διατήρησης της ορμής.
- ✓ Να γνωρίζει τον 2ο Νόμο Νέυτωνα στην γενικευμένη του μορφή.
- ✓ Να γνωρίζει τι είναι κρούση.
- ✓ Να εφαρμόζει την Α.Δ.Ο. στην κίνηση πυραύλων.
- ✓ Να υπολογίζει τις δυνάμεις που αναπτύσσονται κατά την κρούση δύο σωμάτων.

Τυπολόγιο 5ου Κεφαλαίου

Διατήρηση της ορμής
Ορμή υλικού σημείου: $\vec{p} = m \cdot \vec{\upsilon}$
Α.Δ.Ο: Αν $\Sigma\vec{F}_{εξ} = \vec{0}$ τότε $\vec{p}_{ολ(αρχ)} = \vec{p}_{ολ(τελ)}$
Η δύναμη και η μεταβολή της ορμής: $\vec{F} = \dfrac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{p}_{τελ} - \vec{p}_{αρχ}}{\Delta t}$

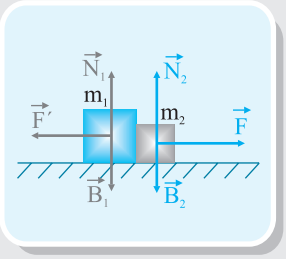
Διατήρηση της ορμής: Τύποι - Βασικές έννοιες

Ποιες δυνάμεις ονομάζονται εσωτερικές και ποιες εξωτερικές; Να αναφερθούν παραδείγματα.

Σε ένα σύστημα σωμάτων διακρίνουμε δύο είδη δυνάμεων:

- Δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ των σωμάτων που αποτελούν το σύστημα και οι οποίες ονομάζονται **εσωτερικές**.
- Δυνάμεις που προέρχονται από το περιβάλλον, δρουν στα σώματα του συστήματος και οι οποίες ονομάζονται **εξωτερικές**.

Παράδειγμα 1: Δύο σώματα m_1 και m_2 που βρίσκονται σε επαφή, αποτελούν ένα σύστημα.



Εσωτερικές:

$\vec{F}$: δύναμη που ασκεί το σώμα m_1 στο σώμα m_2 (δράση).

$\vec{F}'$: δύναμη που ασκεί το σώμα m_2 στο σώμα m_1 (αντίδραση).

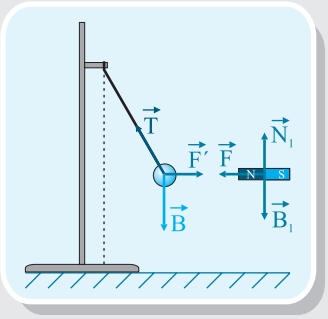
Λόγω 3ου Ν. Νεύτωνα: $\vec{F} = -\vec{F}'$

Εξωτερικές:

Τα βάρη $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$ που ασκεί η Γη στα σώματα.

Οι κάθετες αντιδράσεις $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ που ασκεί το έδαφος.

Παράδειγμα 2: Μαγνήτης έλκει σφαίρα μάζας m (εκκρεμές). Για το σύστημα μαγνήτης - σφαίρα είναι οι δυνάμεις:



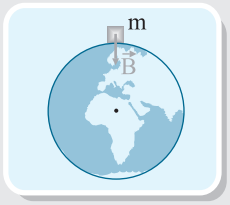
Εσωτερικές:

Για το μαγνήτη, εσωτερική δύναμη είναι η ελκτική δύναμη $\vec{F}$ που ασκεί η σφαίρα στο μαγνήτη.

Για τη σφαίρα, εσωτερική δύναμη είναι η ελκτική δύναμη $\vec{F}'$ από το μαγνήτη.

Εξωτερικές:

Η τάση του νήματος $\vec{T}$, τα βάρη των σωμάτων και η αντίδραση που ισορροπεί τον μαγνήτη.



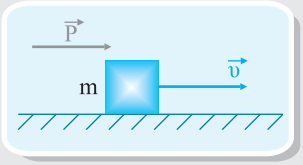
Στην ερώτηση αν το βάρος του σώματος σας είναι δύναμη εσωτερική ή εξωτερική απαντάμε με μια ερώτηση.

- Για ποιο σύστημα;

Ποιο σύστημα λέγεται μονωμένο;

Ένα σύστημα ονομάζεται **μονωμένο** όταν οι εξωτερικές δυνάμεις που δρουν πάνω του έχουν συνισταμένη μηδέν ή αν δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις.

Δώστε τον ορισμός της ορμής $\vec{p}$ σώματος.



Ορμή $\vec{p}$ σώματος: όταν ένα σώμα μάζας m κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ λέμε ότι έχει ορμή $\vec{p}$.

Η ορμή $\vec{p}$ ενός σώματος είναι το διανυσματικό μέγεθος που έχει μέτρο ίσο με το γινόμενο της μάζας m του σώματος επι το μέτρο της ταχύτητα του $\vec{\upsilon}$.

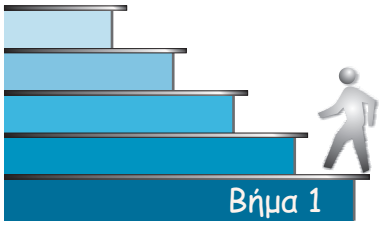
$$\vec{p} = m \cdot \vec{\upsilon}$$

Κατεύθυνση: είναι ίδια με την κατεύθυνση της ταχύτητας του σώματος.

Μονάδα μέτρησης στο S.I.: $1\,kg\,{}^{m}\!/_{s^2}$ (ισοδύναμη με $1N \cdot s$)

Διατυπώστε την αρχή διατήρησης της ορμής Α.Δ.Ο.

Αρχή Διατήρησης ορμής: Σε ένα σύστημα σωμάτων στο οποίο δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις ή αν ασκούνται, έχουν συνισταμένη μηδέν (μονωμένο σύστημα), η ορμή του διατηρείται σταθερή: $\vec{p}_{ολ} = σταθ. \Rightarrow \vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$

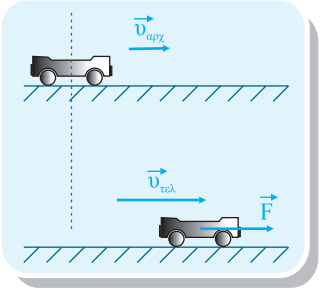


Μαθαίνουμε τις αποδείξεις

Απόδειξη 1

Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής να αποδειχτεί ότι η συντισταμένη δύναμη είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της ορμής.

Οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα προκαλούν την αλλαγή στην ταχύτητα και στην ορμή τους.
Σύμφωνα με το θεμελιώδη Ν. Μηχανικής:



$$\Sigma\vec{F} = m\cdot\vec{\alpha} \Rightarrow \Sigma\vec{F} = m\cdot\frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$\Sigma\vec{F} = m\frac{\vec{\upsilon}_{\tau\varepsilon\lambda} - \vec{\upsilon}_{\alpha\rho\chi}}{\Delta t} = \frac{m\vec{\upsilon}_{\tau\varepsilon\lambda} - m\vec{\upsilon}_{\alpha\rho\chi}}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$\Sigma\vec{F} = \frac{\vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} - \vec{p}_{\alpha\rho\chi}}{\Delta t} \Rightarrow \Sigma\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

Συνεπώς για να αλλάξει η ορμή ενός σώματος απαιτείται η άσκηση δύναμης.

Απόδειξη 2

Ποια είναι η αρχή της κίνησης των πυραύλων;

Θεωρούμε τον πύραυλο και τα αέρια που φεύγουν ως μονωμένο σύστημα. Αρχικά το σύστημα είναι ακίνητο. Όταν μία μάζα αερίων φεύγει με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_\alpha$, η ορμή της είναι:

$$\vec{p}_\alpha = m_\alpha\cdot\vec{\upsilon}_\alpha$$

και ο πύραυλος αποκτά ταχύτητα $\vec{\upsilon}_\pi$, οπότε η ορμή του είναι:

$$\vec{p}_\pi = m_\pi\cdot\vec{\upsilon}_\pi$$

αλλά για το μονωμένο σύστημα πύραυλος - αέρια ισχύει:

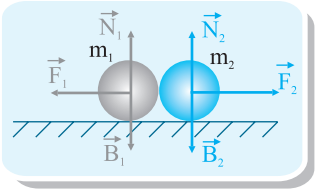
$$\vec{p}_{o\lambda} = \sigma\tau\alpha\theta. \Rightarrow \vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow \vec{0} = \vec{p}_\alpha + \vec{p}_\pi \Rightarrow \vec{0} = m_\alpha\cdot\vec{\upsilon}_\alpha + m_\pi\cdot\vec{\upsilon}_\pi \Rightarrow \vec{\upsilon}_\pi = -\frac{m_\alpha}{m_\pi}\cdot\vec{\upsilon}_\alpha$$

Όταν λοιπόν μια μάζα αερίων βγαίνει από τον πύραυλο με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_\alpha$, ο πύραυλος κινείται αντίρροπα με ταχύτητα που δίνεται από την παραπάνω σχέση. Το αρνητικό πρόσημο στην ταχύτητα του πυραύλου δείχνει ότι έχει φορά αντίθετη εκείνης της ταχύτητας των αερίων.

Απόδειξη 3

Τι γνωρίζετε για την Κρούση δύο σωμάτων;

Σε κάθε κρούση ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής (Α.Δ.Ο) γιατί οι δυνάμεις που αναπτύσσονται κατά την διάρκειά της είναι πολύ μεγάλες σε σχέση με τις δυνάμεις που είχαν ασκηθεί στα σώματα.
Αν δύο σφαίρες μικρών διαστάσεων που κινούνται στην ίδια διεύθυνση, έχουν μάζες m_1, m_2 και συγκρουστούν τότε θα ασκηθούν πάνω τους δύο αντίθετες δυνάμεις:



$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \Rightarrow m_1 \frac{\Delta\vec{\upsilon}_1}{\Delta t} = -m_2 \frac{\Delta\vec{\upsilon}_2}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$m_1 \cdot \Delta\vec{\upsilon}_1 = -m_2 \cdot \Delta\vec{\upsilon}_2 \Rightarrow \Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2 \Rightarrow$$

$$\vec{p}_{\tau 1} - \vec{p}_{\alpha 1} = -\left(\vec{p}_{\tau 2} - \vec{p}_{\alpha 2}\right) \Rightarrow \vec{p}_{\tau 1} + \vec{p}_{\tau 2} = \vec{p}_{\alpha 1} + \vec{p}_{\alpha 2} \Rightarrow$$

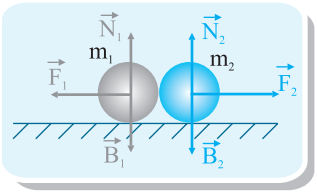
$$\vec{p}_{ολ(\tau)} = \vec{p}_{ολ(\alpha)}$$

Δηλαδή η ορμή του συστήματος είναι σταθερή.

Απόδειξη 4

Να αποδειχθεί ότι η συνολική ορμή ενός μονωμένου συστήματος σωμάτων διατηρείται σταθερή.

Σε δύο σώματα που αλληλεπιδρούν ασκούνται αντίθετες δυνάμεις άρα:



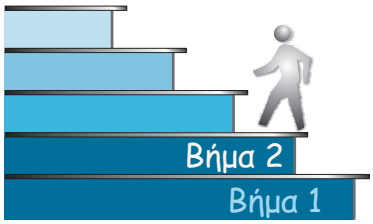
$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \Rightarrow m_1 \frac{\Delta\vec{\upsilon}_1}{\Delta t} = -m_2 \frac{\Delta\vec{\upsilon}_2}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$m_1 \cdot \Delta\vec{\upsilon}_1 = -m_2 \cdot \Delta\vec{\upsilon}_2 \Rightarrow \Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2 \Rightarrow$$

$$\vec{p}_{\tau 1} - \vec{p}_{\alpha 1} = -\left(\vec{p}_{\tau 2} - \vec{p}_{\alpha 2}\right) \Rightarrow \vec{p}_{\tau 1} + \vec{p}_{\tau 2} = \vec{p}_{\alpha 1} + \vec{p}_{\alpha 2} \Rightarrow$$

$$\vec{p}_{ολ(\tau)} = \vec{p}_{ολ(\alpha)}$$

Δηλαδή η ορμή του συστήματος είναι σταθερή.



Επαναλαμβάνουμε τις ασκήσεις “κλειδιά”

Α. Από το σχολικό βιβλίο ΦΥΣΙΚΗ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ έκδοση 2003.

σ.σ. 213 - 215: Ερωτήσεις 4, 8, 11, 13, 17, 18, 19

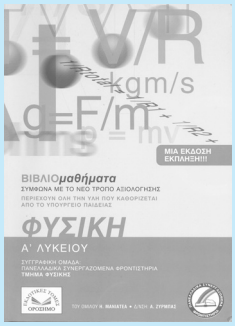
σ.σ. 217 - 218: Ασκήσεις 4, 5, 8, 9, 11, 12, 15, 16, 17

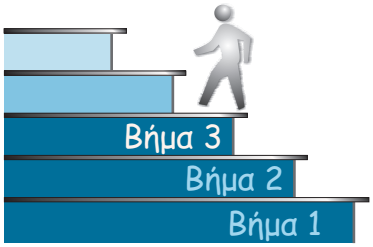
Β. Από τα Βιλιομαθήματα ΦΥΣΙΚΗ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ εκδόσεις “ΟΡΟΣΗΜΟ”

σ. 160: Παράδειγμα 2

σ.σ. 164 - 165: Ερωτήσεις 1, 2, 3, 4, 5

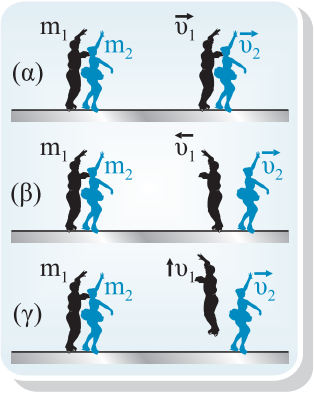
σ.σ. 166 - 167: Ασκήσεις 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12





Λύνουμε περισσότερες ασκήσεις

1. **Σε μία πίστα πάγου δύο χορευτές με μάζες $m_1 = 60kg$ και $m_2 = 50kg$, κινούνται με ταχύτητες $\upsilon_1 = 3m/s$ και $\upsilon_2 = 3,6m/s$. Να βρεθεί η συνολική ορμή τους αν:**
α. κινούνται με ομόρροπα
β. κινούνται αντίρροπα
γ. κινούνται κάθετα



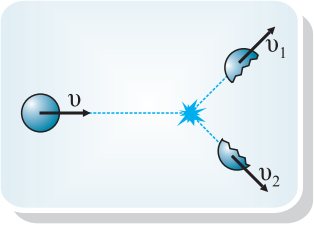
Λύση:

α. $\vec{p}_{ολ} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 \cdot \upsilon_1 + m_2 \cdot \upsilon_2 = 60 \cdot 3 + 50 \cdot 3,6 = 360\,kgm/s$

β. $\vec{p}_{ολ} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \Rightarrow \vec{p}_{ολ} = \vec{p}_1 - \vec{p}_2 = m_1 \cdot \upsilon_1 - m_2 \cdot \upsilon_2 = 60 \cdot 3 - 50 \cdot 3,6 = 0\,kgm/s$

γ. $\vec{p}_{ολ} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \Rightarrow \vec{p}_{ολ} = \sqrt{p_1^2 - p_2^2} = 180\sqrt{2}\,kgm/s$

2. **Βλήμα μάζας m κινείται με ταχύτητα $\upsilon = 5m/s$ και διασπάται σε δύο ίσα κομμάτια που κινούνται σε κάθετες διευθύνσεις. Να βρεθούν οι ταχύτητες των δύο κομματιών αν η ταχύτητα του ενός κομματιού ειναι η μισή της ταχύτητας του άλλου.**



Λύση:

Γνωρίζουμε ότι $\upsilon_2 = \dfrac{\upsilon_1}{2}$ (1)

επειδή τα δύο κομμάτια θα κινηθούν σε κάθετες διευθύνσεις, θα έχουμε:

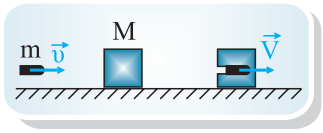
$$p_{ολ}^2 = p_1^2 + p_2^2 \Rightarrow (m\upsilon)^2 = (m_1\upsilon_1)^2 + (m_2\upsilon_2)^2 \Rightarrow m^2\upsilon^2 = \left(\frac{m}{2}\right)^2 \upsilon^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2 \cdot \upsilon_2^2 \Rightarrow$$

$$m^2\upsilon^2 = \frac{m^2\upsilon_1^2}{4} + \frac{m^2\upsilon_2^2}{4} \Rightarrow \upsilon^2 = \frac{\upsilon_1^2}{4} + \frac{\left(\frac{\upsilon_1}{2}\right)^2}{4} \Rightarrow \upsilon^2 = \frac{\upsilon_1^2}{4} + \frac{\upsilon_1^2}{16} \Rightarrow \upsilon^2 = \frac{5\upsilon_1^2}{16} \Rightarrow$$

$$\upsilon_1^2 = \frac{16\upsilon^2}{5} \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{\frac{16\upsilon^2}{5}} \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{\frac{16\cdot 5^2}{5}}\,m/s \Rightarrow \upsilon_1 = 4\sqrt{5}\,m/s$$

Άρα $\upsilon_2 = \frac{\upsilon_1}{2} = 2\sqrt{5}\,m/s$.

3. Βλήμα μάζας $m = 50g$ κινείται οριζόντια με ταχύτητα $\upsilon = 50\,m/s$ και σφηνώνεται σε ακίνητο κιβώτιο μάζας $M = 950\,g$.



α. Να βρεθεί η ταχύτητα του συσσωματώματος μετά τη κρούση.

β. Αν ο συντελεστής της τριβής ολισθήσεως μεταξύ του εδάφους και του κιβωτίου ειναι $\mu = 0,5$ να υπολογίσεται το συνολικό διάστημα που διανύει το κιβώτιο μετά τη κρούση ώσπου να σταματήσει.

Λύση:

α. Ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Ορμής οπότε έχουμε:

$$m\upsilon = (M+m)V \Rightarrow V = \frac{m\cdot\upsilon}{M+m} \Rightarrow V = 2,5\,m/s$$

β. Το σώμα θα εκτελέσει ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση μέχρι να σταματήσει οπότε ισχύον οι σχέσεις: $\upsilon = \upsilon_0 - \alpha t$ (1)

$$x = \upsilon_0 \cdot t - \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad (2)$$

Η επιβραδύνουσα δύναμη είναι η Τριβή επομένως βρίσκουμε την επιβράδυνση

$$T = (M+m)\alpha \Rightarrow \mu N = (M+m)\alpha \Rightarrow \mu(M+m)g = (M+m)\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \mu g \Rightarrow \alpha = 5\,m/s$$

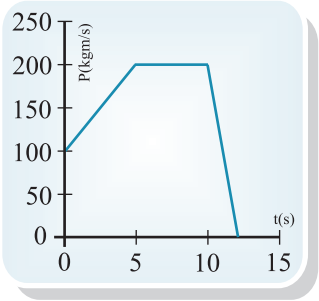
Για τη στιγμή που το σώμα σταματάει η (1) θα γίνει:

$$0 = \upsilon_0 - \alpha\cdot t \Rightarrow t = \frac{\upsilon_0}{\alpha} \Rightarrow t = 0,5\,s$$

Άρα το συνολικό διάστημα θα βρεθεί από τη σχέση (2) αντικαθιστώντας:

$$x = 2,5\,m/s\cdot 0,5\,s - \frac{1}{2}\cdot 5\,m/s^2\cdot 0,5^2\,s^2 \Rightarrow x = 0,625\,m$$

4. Σε σώμα μάζας $m = 5kg$ ασκείται οριζόντια δύναμη F. Αν η μεταβολή της ορμής μεταβάλλεται σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα, να βρεθούν:
α. Ποιά η ελάχιστη και ποιά η μέγιστη ταχύτητα του σώματος;
β. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις υ(t) , F(t) και να βρεθεί η συνολική μετατόπιση του σώματος.

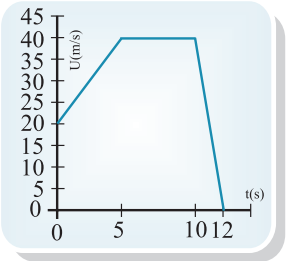


Λύση:

α. $\upsilon_{min} = \frac{p_{min}}{m} = \frac{0kgm/s}{5kg} = 0m/s$

$\upsilon_{max} = \frac{p_{max}}{m} = \frac{200kgm/s}{5kg} = 40m/s$

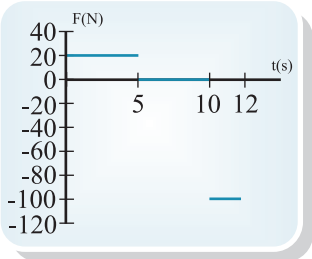
β. Για να κάνουμε τη γραφική παράσταση υ(t) θα πρέπει να υπολογίσουμε τις τιμές των ταχυτήτων τις χρονικές στιγμές 0, 5, 10, 12s.



$\upsilon_0 = \frac{p_0}{m} = 20m/s,\ \upsilon_5 = \frac{p_5}{m} = 40m/s,$

$\upsilon_{10} = \frac{p_{10}}{m} = 40m/s,\ \upsilon_{12} = \frac{p_{12}}{m} = 0m/s$

Για την F(t) έχουμε:

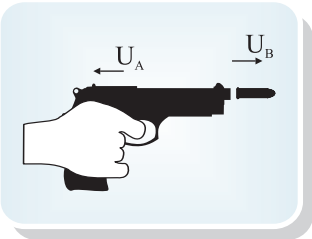


Από 0-5s: $F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{100kgm/s}{5s} = 20N$

Από 5-10s: $F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{0kgm/s}{5s} = 0N$

Από 10-12s: $F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{-200kgm/s}{2s} = -100N$

5. Πυροβόλο μάζας $M = 250kg$ που ηρεμεί, εκσφενδονίζει βλήμα μάζας $m = 5kg$ που εξέρχεται από την κάνη με οριζόντια ταχύτητα $\upsilon_\beta = 500m/s$. Να βρεθούν:
α. η ταχύτητα ανάκρουσης υ_π του πυροβόλου
β. τα μέτρα των ορμών του βλήματος και του πυροβόλου κατά την έξοδο του βλήματος από το πυροβόλο, και να δικαιολογηθεί η ισότητά τους
γ. η μεταβολή του μέτρου της ορμής του βλήματος κατά την κίνησή του μέσα στην κάνη.



Λύση:

α. Ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Ορμής

$$p_{\alpha\rho\chi} = p_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow 0 = m_\beta \cdot \upsilon_\beta - m_\pi \cdot \upsilon_\pi \Rightarrow \upsilon_\pi = \frac{m_\beta \cdot \upsilon_\beta}{m_\pi} \Rightarrow \upsilon_\pi = 10\,m/s$$

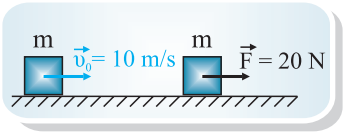
β. Για το βλήμα: $p_\beta = m_\beta \cdot \upsilon_\beta = 5kg \cdot 500m/s = 2500\,kgm/s$

Για το πυροβόλο: $p_\pi = m_\pi \cdot \upsilon_\pi = 250kg \cdot 10m/s = 2500\,kgm/s$

Όπως καταλαβαίνουμε τα μέτρα των τελικών ορμών είναι ίσα λόγω της αρχής διατήρησης της ορμής. Η αρχική ορμή είναι 0 επομένως θα πρέπει και η τελική να είναι μηδέν δηλαδή θα πρέπει $p_\pi = p_\beta$.

γ. $\Delta p = p_{\tau\varepsilon\lambda} - p_{\alpha\rho\chi} = m_\beta \cdot \upsilon_\beta - 0 = 5kg \cdot 500m/s = 2500\,kgm/s$

6. Ένα σώμα μάζας $m = 20kg$ κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο, με σταθερή ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 = 10m/s$. Κάποια στιγμή ασκείται στο σώμα σταθερή δύναμη μέτρου $F = 20N$ κατά τη διεύθυνση και φορά της ταχύτητας, για χρονικό διάστημα $t = 8s$. Να βρεθούν:



α. η μετατόπιση του σώματος για το χρονικό διάστημα t

β. η μεταβολή της ορμής του σώματος στο χρονικό διάστημα t

γ. το μέτρο της μεταβολής της ορμής κατά το χρονικό διάστημα από 0 έως 8s

δ. ο ρυθμός μεταβολής της ορμής της χρονική στιγμή $t = 0$.

Λύση:

α. Το σώμα θα εκτελέσει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα υ_0 οπότε θα ισχύουν οι σχέσεις: $\upsilon = \upsilon_0 + \alpha \cdot t$ (1) και

$x = \upsilon_0 \cdot t + \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2$ (2) όπου $\alpha = \frac{F}{m} = \frac{20N}{20kg} = 1m/s^2$.

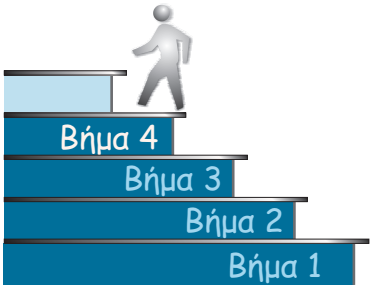
Άρα η (2) γίνεται: $x = 10m/s \cdot 8s + \frac{1}{2}1m/s^2 \cdot 8^2 s^2 \Rightarrow x = 112\,m$.

β. Τη χρονική στιγμή $t = 8s$ η ταχύτητα του σώματος θα είναι:

$\upsilon = \upsilon_0 + \alpha \cdot t = 10 + 1 \cdot 8 = 18\,m/s$ και $\Delta p = p_{\tau\varepsilon\lambda} - p_{\alpha\rho\chi} \Rightarrow$

$\Delta p = m\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda} \cdot m\upsilon_{\alpha\rho\chi} = 20kg \cdot 18m/s - 20kg \cdot 10m/s \Rightarrow \Delta p = 160\,kgm/s$

γ. Το μέτρο της μεταβολής της ορμής θα βρεθεί διανυσματικά.

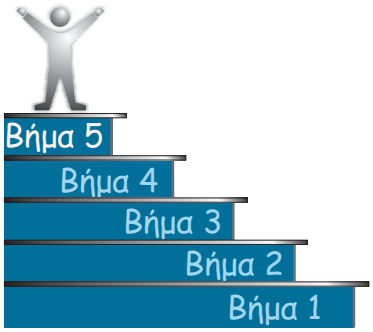


Λύνουμε μόνοι μας

1. Κιβώτιο μάζας $M = 0,5\,kg$ τοποθετείται σε τραχεία οριζόντια επιφάνεια. Ο συντελεστής τριβής κιβωτίου - επιφάνειας είναι $\mu = 0,4$. Βλήμα μάζας $m = 20\,g$ εκτοξεύεται με ταχύτητα $\upsilon = 150\,m/s$ προς το κιβώτιο και ενσωματώνεται σ' αυτό. Να υπολογιστούν:
α. η ταχύτητα με την οποία θα κινηθεί το κιβώτιο μετά την κρούση
β. το διάστημα που θα διατρέξει το κιβώτιο μέχρι να σταματήσει.

2. Ένα βλήμα μάζας $m_1 = 0,1\,kg$ κινείται με οριζόντια ταχύτητα $\upsilon_1 = 400\,m/s$ και διαπερνά ένα κιβώτιο μάζας $m_2 = 2\,kg$ που βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Αν το βλήμα βγαίνει από το κιβώτιο με ταχύτητα $\upsilon_1' = 100\,m/s$ σε χρόνο $\Delta t_1 = 0,1\,s$. Να βρείτε:
α. την ταχύτητα που αποκτά το κιβώτιο
β. τη μέση οριζόντια δύναμη που ασκεί το βλήμα στο κιβώτιο.

3. Μια βάρκα μήκους $\ell = 6\,m$ και μάζας $M = 120\,kg$ είναι ακίνητη στην ήρεμη επιφάνεια μιας λίμνης. Ένας άνθρωπος μάζας $m = 60\,kg$, που είναι αρχικά ακίνητος, μετακινείται από το ένα άκρο της βάρκας στο άλλο. Κατά πόσο θα μετακινηθεί η βάρκα κατά τη διάρκεια της μετακίνησης του ανθρώπου; Η αντίσταση του νερού θεωρείται αμελητέα.



Ελέγχουμε τις γνώσεις μας

Θέμα 1ο

1. Τι έχει μεγαλύτερη ορμή, ένα ακίνητο φορτηγό ή ένα παιδί που τρέχει; Δικαιολογήστε την απάντηση σας.

2. Η ορμή ενός σώματος είναι μέγεθος ..... , το μέτρο της υπολογίζεται από την σχέση ..... και η μονάδα της στο S.I. είναι ..... .

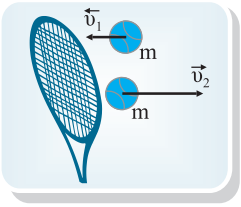
Θέμα 2ο

α. Να διατυπώσετε την αρχή διατήρησης της ορμής. Ισχύει για όλα τα συστήματα σωμάτων;

β. Επιβεβαιώστε την Α.Δ.Ο για δύο σφαίρες την στιγμή που συγκρούονται.

Θέμα 3ο

Ένα μπαλάκι του τένις μάζας $m = 100\,g$ που κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1 = 10\,m/s$ συγκρούεται με κατακόρυφο τοίχο και ανακλάται με οριζόντια ταχύτητα $\upsilon_2 = 8\,m/s$.



α. Να βρείτε τη μεταβολή της ορμής του, λόγω της σύγκρουσης με τον τοίχο.

β. Αν η κρούση διαρκεί $\Delta t = 0{,}09\,s$ να υπολογίσετε την μέση δύναμη που δέχεται το μπαλάκι από τον τοίχο. (Να την θεωρήσετε σταθερή κατά την διάρκεια της κρούσης).

Θέμα 4ο

Ένα σώμα μάζας $M = 5\,kg$ είναι ακίνητο πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Βλήμα μάζας $m = 50\,g$ κινείται οριζόντια με ταχύτητα $\upsilon_1 = 400\,m/s$, διαπερνάει το σώμα και εξέρχεται από αυτό με ταχύτητα $\upsilon_2 = 100\,m/s$. Μετά την κρούση το σώμα ολισθαίνει στο οριζόντιο επίπεδο και σταματάει αφού διανύσει διάστημα $s = 4{,}5\,m$. Να υπολογιστούν: **α.** η ταχύτητα του σώματος αμέσως μετά την κρούση

β. ο συντελεστής τριβής μεταξύ σώματος - επιπέδου. Δίνεται $g = 10\,m/s^2$

Κεφάλαιο 6ο

Διατήρηση της μηχανικής ενέργειας

Ο μαθητής που έχει μελετήσει το κεφάλαιο διατήρηση της μηχανικής ενέργειας πρέπει:

- ✓ Να γνωρίζει την έννοια και τον ορισμό του έργου δύναμης.
- ✓ Να μπορεί να υπολογίζει το έργο δύναμης σταθερού μέτρου, όπως και το έργο δύναμης μεταβλητού μέτρου F(x).
- ✓ Να γνωρίζει και να μπορεί να εφαρμόσει το θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.).
- ✓ Να γνωρίζει την έννοια της δυναμικής ενέργειας.
- ✓ Να υπολογίζει τη σχέση της μεταβολής της δυναμικής ενέργειας με το έργο της δύναμης αλληλεπίδρασης, για το βαρυτικό πεδίο.
- ✓ Να γνωρίζει την έννοια της μηχανικής ενέργειας.
- ✓ Να μπορεί να εφαρμόσει την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας (Α.Δ.Μ.Ε.) και να γνωρίζει πότε ισχύει.
- ✓ Να γνωρίζει ποιες δυνάμεις λέγονται συντηρητικές ή διατηρητικές και τι ισχύει για το έργο τους. (απόδειξη για την περίπτωση του βάρους).
- ✓ Να γνωρίζει τι είναι ισχύς και να αποδεικνύει την σχέση της με την ταχύτητα του σώματος.
- ✓ Να εφαρμόζει την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας στην οριζόντια βολή.
- ✓ Να γνωρίζει ποιες λέγονται μη συντηρητικές δυνάμεις και τι ισχύει για την μηχανική ενέργεια και την ορμή, όταν ασκούνται αυτές οι δυνάμεις.

Τυπολόγιο 6ου Κεφαλαίου

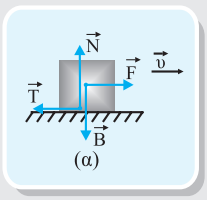
Διατήρηση της μηχανικής ενέργειας
Έργο σταθερής δύναμης: $W_F = F \cdot x \cdot \text{συν}\theta$
Θ.Μ.Κ.Ε: $K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{F(\text{ολ})}$
Δυναμική βαρυτική ενέργεια $U_\beta = m \cdot g \cdot h$
Έργο δύναμης αλληλεπιδράσεων: $W_{F(1\to 2)} = -\Delta U = -(U_2 - U_1) = U_1 - U_2$
Μηχανική ενέργεια: $E = K + U = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + mgh$
Ισχύς: $P = \frac{W}{t}$. Αν $\vec{F} = \text{σταθ}$, $\vec{\upsilon} = \text{σταθ}$ και ομόρροπα τότε: $P = F \cdot \upsilon$

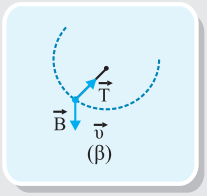
Διατήρηση της μηχανικής ενέργειας: Τύποι - Βασικές έννοιες

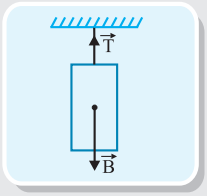
Πότε μία δύναμη παράγει έργο;

Μια δύναμη, που ασκείται σε ένα σώμα, παράγει έργο όταν μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της κατά τη διεύθυνσή της.

Παράδειγμα:



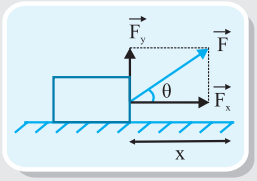




Στο σχ.(α) παράγουν έργο οι δυνάμεις $\vec{F}$, $\vec{T}$, ενώ δεν παράγουν οι δυνάμεις $\vec{N}$, $\vec{B}$.
Στο σχ.(β) παράγει έργο το βάρος $\vec{B}$, ενώ η τάση $\vec{T}$ δεν παράγει έργο.
Στο σχ.(γ) δεν παράγουν έργο οι $\vec{T}$, $\vec{B}$.

Να δώσετε τον ορισμό του έργου σταθερής δύναμης:

Έργο σταθερής δύναμης είναι ένα μονόμετρο φυσικό μέγεθος που ισούται με το γινόμενο του μέτρου της συνιστώσας της δύναμης κατά τη διεύθυνση της κίνησης επί τη μετατόπισή της.



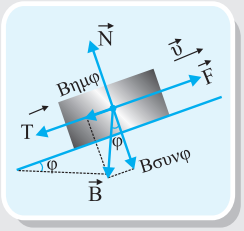
$W = F \cdot x \cdot \text{συν}\theta$ Μονάδας (S.I) $1\text{Joule} = 1\text{N} \cdot \text{m}$

Ποια είναι η φυσική σημασία του έργου;

Το έργο εκφράζει την ενέργεια που μεταφέρεται από ένα σώμα σ' ένα άλλο ή που μετατρέπεται απο μια μορφή σε άλλη. Κάθε φορά που παράγεται έργο έχουμε δαπάνη ενέργειας ίσης με το παραγόμενο έργο.

Παράδειγμα:

Ένα σώμα ανέρχεται σε κεκλιμένο δάπεδο υπό την επίδραση δύναμης $\vec{F}$ όπως στο σχήμα.



W_F : εκφράζει μεταφορά ενέργειας από τον παράγοντα, που προκαλεί την κίνηση, στο σώμα.

$W_{Βημφ}$: εκφράζει μετατροπή μέρους της μεταφερόμενης ενέργειας σε δυναμική.

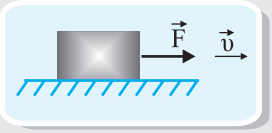
W_T : εκφράζει μετατροπή μέρους της μεταφερόμενης ενέργειας σε θερμότητα.

$W_{F-Βημφ-T}$: το έργο της συνισταμένης δύναμης, εκφράζει μετατροπή μέρους της μεταφερόμενης ενέργειας σε κινητική ενέργεια.

$W_N = 0$, $W_{Βσυνφ} = 0$ γιατί είναι κάθετες στην μετατόπιση.

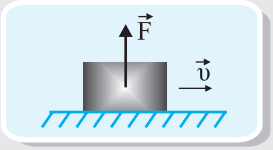
Διερεύνηση της τιμής του έργου:

α. Αν η δύναμη είναι ομόρροπη με την μετατόπιση, $\theta = 0^o \Rightarrow συν0^o = 1$ τότε $W = F \cdot x$. Το έργο αυτό το λέμε θετικό ή παραγόμενο, οπότε η δύναμη προσφέρει ενέργεια στο σώμα.

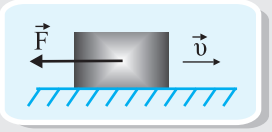


Γενικότερα $W = F \cdot x \cdot συνθ > 0$ με $0 \le \theta < 90^0$.

β. Αν η δύναμη είναι κάθετη με την μετατόπιση, $\theta = 90^o \Rightarrow συν90^o = 0$ τότε $W = 0$, δεν παράγει έργο. π.χ. κάθετη αντίδραση, κεντρομόλος δύναμη.

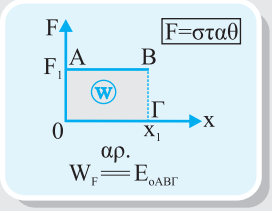


γ. Αν η δύναμη είναι αντίρροπη με την μετατόπιση, $\theta = 180^o \Rightarrow συν180^o = -1$, $W = -F \cdot x$. Το έργο αυτό το λέμε αρνητικό ή καταναλισκόμενο, οπότε η δύναμη αφαιρεί ενέργεια από το σώμα.

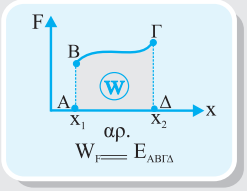


Γενικότερα $W = F \cdot x \cdot συνθ < 0$ με $90^0 < \theta \le 180^0$.

δ. Αν $\vec{F} = σταθ$ και η δύναμη μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της στην διεύθυνσή της, τότε το εμβαδόν της γραφικής παράστασης F(x) ισούται αριθμητικά με το έργο της $\vec{F}$.



ε. Αν η τιμή της δύναμης δεν είναι σταθερή τότε το εμβαδόν της F(x), ισούται αριθμητικά με το έργο της $\vec{F}$.

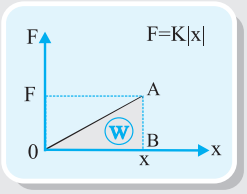


Παράδειγμα:

Η δύναμη ελατηρίου $F_{ελ} = -K \cdot x$ (N. Hooke)

$$W_F = E_{OAB} \Rightarrow W_F = \frac{1}{2} F \cdot x$$

$$W_F = \frac{1}{2} Kx \cdot x \Rightarrow W_F = \frac{1}{2} K \cdot x^2$$

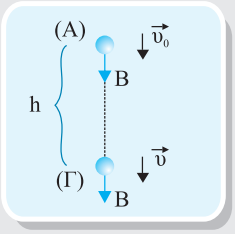


όπου K: σταθερά ελατηρίου

x: απομάκρυνση απο την θέση φυσικού μήκους

Να διατυπωθεί η σχέση έργου βάρους και μεταβολής της κινητικής ενέργειας:

$$W_B = K_{τελ} - K_{αρχ} \Rightarrow W_B = \Delta K$$



Δηλαδή η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ισούται με το έργο του βάρους στην ελεύθερη πτώση. Το συμπέρασμα αυτό ισχύει γενικευμένο με τον τίτλο "θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας" (Θ.Μ.Κ.Ε) για την περίπτωση που ασκούνται πολλές δυνάμεις στο σώμα:

Διατυπώστε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας:

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ενός σώματος είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των έργων των δυνάμεων που ασκούνται σ' αυτό.

$$\Delta K = \Sigma W_F$$

Παρατήρηση: Με το Θ.Μ.Κ.Ε. μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα, την μετατόπιση του σώματος ή το έργο μιας άγνωστης δύναμης.

Ποια δύναμη λέγεται συντηρητική;

Μια δύναμη είναι συντηρητική αν το έργο που παράγει σε μια κλειστή διαδρομή είναι μηδέν.

Για τις συντηρητικές δυνάμεις υπάρχει και άλλος ισοδύναμος ορισμός:

Μια δύναμη είναι συντηρητική, αν το έργο που παράγεται από αυτή πάνω σε ένα σωμάτιο που κινείται μεταξύ δύο σημείων, εξαρτάται μόνο από τα σημεία αυτά και όχι από την διαδρομή.

Τι γνωρίζετε για τη δυναμική ενέργεια;

Δυναμική ενέργεια είναι το αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης ενός συστήματος σωμάτων, με συντηρητικές δυνάμεις.

- Για να υπάρξει δυναμική ενέργεια απαιτείται ένα σύστημα τουλάχιστον δύο σωμάτων. Για παράδειγμα, δεν υπάρχει η δυναμική ενέργεια ενός μήλου αλλά η δυναμική ενέργεια του συστήματος μήλου - Γη.
- Αν οι δυνάμεις που αλληλεπιδρούν μεταξύ των σωμάτων του συστήματος είναι συντηρητικές (διατηρητικές), στο σύστημα μήλου - Γης, αν αφήσουμε το μήλο να πέσει από ύψος h στο έδαφος, τότε η δυναμική του ενέργεια μετατρέπεται εξ' ολοκλήρου σε κινητική (αγνοούμε την αντίσταση του αέρα).
- Η δυναμική ενέργεια ενός σώματος (σύστημα Γη - σώμα) σε μικρό ύψος h πάνω από την επιφάνεια της Γης είναι: $U = mgh$

Τι γνωρίζετε για τη σχέση μεταξύ της μεταβολής της δυναμικής ενέργειας και του έργου συντηρητικής δύναμης;

Το έργο του βάρους ενός σώματος είναι αντίθετο με την μεταβολή της δυναμικής ενέργειας μεταξύ δύο θέσεων (ή ίσο με την διαφορά της δυναμικής ενέργειας του συστήματος). Το συμπέρασμα αυτό είναι γενικότερο για τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ συντηρητικών δυνάμεων π.χ. ελατηρίου, ηλεκτροστατικές.

$$\mathbf{W_F = \Delta U}$$

Τι ονομάζουμε μηχανική ενέργεια;

Μηχανική ενέργεια ονομάζουμε το άθροισμα της κινητικής και δυναμικής ενέργειας ενός συστήματος σωμάτων: $\mathbf{E = K + U}$

Τι γνωρίζουμε για την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας;

Η μηχανική ενέργεια διατηρείται εφ' όσον οι δυνάμεις που εκτελούν έργο είναι συντηρητικές. Δηλαδή, $\mathbf{\Delta K + \Delta U = 0}$.

Να συγκριθούν η κινητική και η δυναμική ενέργεια

Κινητική	Δυναμική
Υπάρχει εφ' όσον υπάρχει κίνηση.	Υπάρχει εφ' όσον αλληλεπιδρούν με συντηρητικές δυνάμεις τα σώματα του συστήματος.
Είναι δυνατόν ένα σώμα να έχει, κινητική ενέργεια χωρίς να αλληλεπιδρά με άλλα σώματα. $\Delta K = W_{ολ}$	Είναι δυνατόν, ένα σύστημα να έχει, δυναμική ενέργεια χωρίς να κινείται. $-\Delta U = W_{αλλ}$
το έργο $W_{ολ}$: της συνισταμένης των δυνάμεων.	$W_{αλλ}$: το έργο των συντηρητικών δυνάμεων αλληλεπίδρασης.

Τι γνωρίζουμε για την ισχύ;

Η ισχύς μιας μηχανής είναι ένα μονόμετρο φυσικό μέγεθος που ισούται με το πηλίκο του έργου που παράγει η μηχανή προς τον αντίστοιχο χρόνο:

$$\mathbf{P = \frac{W}{t}}$$

Ισοδύναμα εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής της ενέργειας: $\mathbf{P = \frac{\Delta W}{\Delta t}}$

Είναι μονόμετρο μέγεθος με μονάδα μέτρησης στο S.I. = 1 Watt = 1 J/s

Ποιους άλλους τύπους για την ισχύ γνωρίζουμε;

Στιγμιαία ισχύς: $\mathbf{P = F_x \cdot \upsilon}$, όπου υ: η στιγμιαία ταχύτητα και F_x η συνιστώσα της διεύθυνσης της κίνησης.

Τι γνωρίζουμε για το συνταλεστή απόδοσης μίας μηχανής;

Συντελεστής απόδοσης μηχανής (α) είναι το πηλίκο της ωφέλημης ισχύος ($P_{ωφ.}$) προς τη δαπανόμενη ισχύ ($P_{δαπ.}$):

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{P_{ωφ.}}{P_{δαπ.}}}$$

Μεθοδολογία για τη λύση ασκήσεων με την βοήθεια του Θ.Μ.Κ.Ε.

Για να λύσουμε μια άσκηση, κάνουμε τις παρακάτω διαδικασίες:

α. Σχεδιάζουμε, πάνω στο σώμα, που κινείται, όλες τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω του και τις αναλύουμε σε δύο άξονες: έναν κατά τη διεύθυνση κίνησης και έναν κάθετο σ' αυτόν.

β. Καθορίζουμε το διάστημα ή τα διαστήματα κατά τα οποία ασκείται η κάθε μια από αυτές τις δυνάμεις.

γ. Βρίσκουμε το έργο (αρνητικό ή θετικό) της κάθε μιας και κατόπιν το ολικό έργο.

δ. Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για όλη την διάρκεια της κίνησης ή επιλέγουμε εμείς το διάστημα $\frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^{\ 2} = W_{ολ}$

Μεθοδολογία με Θ.Μ.Κ.Ε., Α.Δ.Μ.Ε. και Α.Δ.Ε.

i. Το θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας (ΘΜΚΕ):

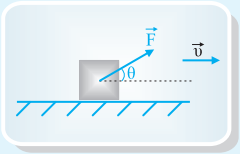
$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{ολ} \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^{\ 2} = W_{ολ}$$

Πλεονεκτήματα: εφαρμόζεται χωρίς κανένα περιορισμό.

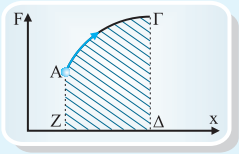
Μειονεκτήματα: χρειάζεται να υπολογίσουμε το $W_{ολ}$. Αυτό γίνεται είτε βρίσκοντας την συνισταμένη δύναμη $\vec{F}_{ολ}$ και υπολογίζοντας το έργο της είτε υπολογίζοντας το έργο κάθε δύναμης και αθροίζοντάς τα αλγεβρικά.

Για τον υπολογισμό του έργου δύναμης πρέπει ξέρουμε τρία πράγματα:

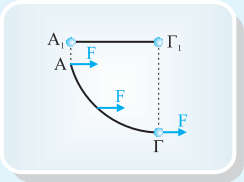
α. Το είδος της δύναμης:



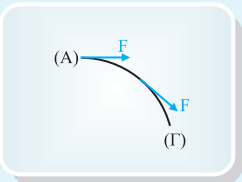
• Αν $\vec{F} = σταθ$: $W = F \cdot x \cdot συνθ$



• Αν $F = f(x)$: $W \overset{αριθ}{=} E_{ΑΓΔΔ'}$



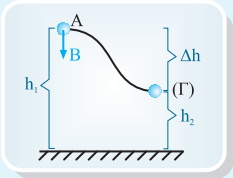
• Αν $\vec{F} = σταθ$: και μετατοπίζεται σε καμπύλη τροχιά τότε $W = F \cdot (A_1\Gamma_1)$, όπου $(A_1\Gamma_1)$: η προβολή της τροχιάς σε διεύθυνση παράλληλη της δύναμης



• Αν $\vec{F}$ εφάπτεται σε καμπύλη τροχιά και έχει σταθερό μέτρο:

$W = F \cdot (ΑΓ)$, όπου (ΑΓ): το μήκος της τροχιάς

- Αν η **δύναμη είναι συντηρητική**, όπως το βάρος, παίζει ρόλο όχι η διαδρομή αλλά η αρχική και τελική θέση. Για το βάρος είναι η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των δύο θέσεων $W = B \cdot \Delta h$



β. ***Την μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της δύναμης***

γ. ***Το πρόσημο του έργου:***

- είναι θετικό αν η δύναμη είναι ομόρροπη με την μετατόπιση (προσφέρει ενέργεια στο σώμα)
- είναι αρνητικό αν η δύναμη είναι αντίρροπη με την μετατόπιση (αφαιρεί ενέργεια από το σώμα)
- είναι μηδέν αν η δύναμη είναι κάθετη στην μετατόπιση.

ii. Η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας (Α.Δ.Μ.Ε.)

$$E_{(1)} = E_{(2)} \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + mgh_1 = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 + mgh_2$$

Πλεονεκτήματα: Εφαρμόζεται μεταξύ δύο θέσεων της τροχιάς του κινητού, αρκεί να έχω προσδιορίσει (είτε σαν δεδομένο είτε σαν ζητούμενο) την ταχύτητα και την θέση.

Μειονεκτήματα: Εφαρμόζεται αν στο σώμα ασκούνται μόνο συντηρητικές δυνάμεις (βάρος, ηλεκτροστατικές κ.λ.π).

iii. Θεώρημα διατήρησης της ενέργειας (Α.Δ.Ε. γενική διατύπωση):

$E_{(1)} + W_F + W_{\alpha\nu\tau} = E_{(2)}$ όπου

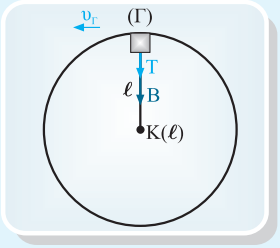
W_F : το έργο των δυνάμεων που προσφέρουν ενέργεια στο σώμα, εκτός του βάρους.

$W_{\alpha\nu\tau}$: το έργο των δυνάμεων που αφαιρούν ενέργεια από το σώμα (τριβές, αντιστάσεις κ.λ.π.), των οποίων το έργο είναι αρνητικό.

Μεθοδολογία για λύση ασκήσεων με συνθήκη ανακύκλωσης ή ανακύκλισης

Με τον όρο συνθήκη ανακύκλωσης στην καμπυλόγραμμη κίνηση εννούμε την οριακή συνθήκη, ώστε το σώμα που εκτελεί καμπυλάγραμμη κίνηση να περνά από το ανώτερο σημείο της τροχιάς του, διατηρώντας οριακά την κυκλική κίνησή του

α. Σώμα δεμένο σε νήμα εκτελεί κυκλική κίνηση σε κατακόρυφο επίπεδο. Δέχεται την επίδραση της τάσης $\vec{T}$ και του βάρους $\vec{B}$. Η συνισταμένη των δυνάμεων στο ανώτερο σημείο της τροχιάς είναι η κεντρομόλος:



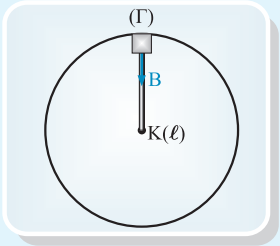
$$\left.\begin{array}{l} F_\kappa = \dfrac{m\upsilon_\Gamma^2}{\ell} \\ F_\kappa = B + T \end{array}\right\} B + T = \frac{m\upsilon_\Gamma^2}{\ell} \quad (1)$$

Για να εκτελέσει οριακά ανακύκλωση πρέπει $T = 0$. Από τη (1) έχουμε:

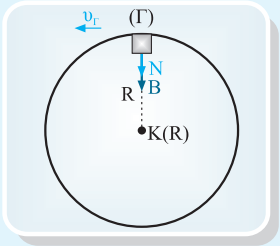
$$mg = \frac{m\upsilon_{\Gamma,min}^2}{\ell} \Rightarrow \upsilon_{\Gamma,min} = \sqrt{g\ell}$$

β. Σώμα στο άκρο αβαρούς ράβδου που εκτελεί κυκλική κίνηση σε κατακόρυφο επίπεδο. Αρκεί στο ανώτερο σημείο της τροχιάς να έχει μηδενική ταχύτητα:

$$\upsilon_{\Gamma,min} = 0$$



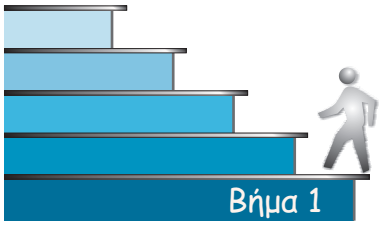
γ. Σώμα κινείται στο εσωτερικό καμπύλης τροχιάς (ή στο εξωτερικό). Στο σώμα ασκούνται η κάθετη αντίδραση $\vec{N}$ και το βάρος $\vec{B}$. Στο ανώτερο σημείο της τροχιάς η συνισταμένη τους, στην διεύθυνση της ακτίνας είναι η κεντρομόλος:



$$\left.\begin{array}{l} F_\kappa = \dfrac{m\upsilon_\Gamma^2}{R} \\ F_\kappa = B + N \end{array}\right\} B + N = \frac{m\upsilon_\Gamma^2}{R} \quad (1)$$

Για να εκτελέσει οριακά ανακύκλωση πρέπει $N = 0$. Η (1) γίνεται:

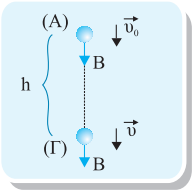
$$mg = \frac{m\upsilon_{\Gamma,min}^2}{R} \Rightarrow \upsilon_{\Gamma,min} = \sqrt{gR}$$



Μαθαίνουμε τις αποδείξεις

Απόδειξη 1

Να αποδειχθεί η σχέση μεταξύ του έργου βάρους και της μεταβολής της κινητικής ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.):



Σώμα κινείται κατακόρυφα, κάνοντας ελεύθερη πτώση, αν θεωρήσουμε αμελητέα την αντίσταση του αέρα. Στη θέση (Α) έχει αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$, ενώ μετά από ύψος h, στη θέση (Γ) έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}$. Η κίνηση είναι ευθ. ομαλά επιταχυνόμενη άρα:

$$\upsilon = \upsilon_0 + gt \Rightarrow \upsilon - \upsilon_0 = gt \Rightarrow t = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{g} \quad (1)$$

$$h = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}gt^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} h = \upsilon_0 \frac{(\upsilon - \upsilon_0)}{g} + \frac{1}{2}g\frac{(\upsilon - \upsilon_0)^2}{2g} \Rightarrow$$

$$h = \frac{2\upsilon_0(\upsilon - \upsilon_0)}{2g} + \frac{(\upsilon - \upsilon_0)^2}{2g} \Rightarrow h = \frac{\upsilon^2 - \upsilon_0^2}{2g} \quad (2)$$

Το έργο του βάρους για την ίδια διαδρομή είναι:

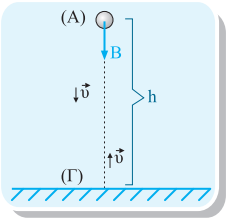
$$W_B = B \cdot h \overset{(2)}{\Rightarrow} W_B = mg\frac{\upsilon^2 - \upsilon_0^2}{2g} \Rightarrow W_B = \frac{m\upsilon^2}{2} - \frac{m\upsilon_0^2}{2}$$

Η ποσότητα $\frac{m\upsilon^2}{2}$ εκφράζει την τελική κινητική ενέργεια $K_{τελ}$ ενώ η $\frac{m\upsilon_0^2}{2}$ την αρχική κινητική ενέργεια $K_{αρχ}$. Συνεπώς $W_B = K_{τελ} - K_{αρχ} \Rightarrow W_B = \Delta K$

Δηλαδή η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ισούται με το έργο του βάρους στην ελεύθερη πτώση.

Απόδειξη 2

Να αποδείξετε ότι το βάρος είναι συντηρητική δύναμη:



Πράγματι το βάρος είναι συντηρητική δύναμη γιατί το έργο του στην διαδρομή:

Α → Γ → Α είναι μηδέν.

$W_{ολ} = W_{ΑΓ} + W_{ΓΑ} \Rightarrow W_{ολ} = B \cdot h - B \cdot h = 0$

Απόδειξη 3

Να αποδείξετε ότι μια δύναμη είναι συντηρητική, αν το έργο της πάνω σε ένα σωμάτιο που κινείται μεταξύ δύο σημείων, εξαρτάται μόνο από τα σημεία αυτά:

Πράγματι, το έργο του βάρους στην διαδρομή Α → Γ

είναι ίδιο με το έργο του στην διαδρομή Α → Δ.

Το $W_{A\Delta} = B\cdot(A\Delta) = B \cdot h$

Το $W_{A\Gamma} = B_x \cdot (A\Gamma) = B \cdot \eta\mu\varphi \cdot (A\Gamma) = B\dfrac{h\cdot(A\Gamma)}{(A\Gamma)} = B\cdot h$

Από τις παραπάνω σχέσεις ισχύει: $\mathbf{W_{A\Delta} = W_{A\Gamma}}$

Απόδειξη 4

Να αποδείξετε ότι η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας είναι ίση με το έργο του βάρους:

Ένα σώμα μάζας m βρίσκεται στη θέση (1) και το αφήνουμε να πέσει ελεύθερα μέχρι τη θέση (2) εξ' αιτίας του βάρους του:

$$\left.\begin{array}{l} U_1 - U_2 = mgh_1 - mgh_2 = mgh = W_{B(1\to 2)} \\ \text{όμως } \Delta U = U_2 - U_1 = -(U_1 - U_2) \end{array}\right\} \Rightarrow W_{B(1\to 2)} = -\Delta U$$

Απόδειξη 5

Να αποδείξετε ότι η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή, εφόσον εκτελείται έργο μόνο από συντηρητικές δυνάμεις: $\mathbf{W_{αλληλεπίδραση} = W_{ολικό}}$

$$\left.\begin{array}{r} \text{Από Θ.Μ.Κ.Ε.: } \Delta K = W_{αλλ.} \Rightarrow K_2 - K_1 = W_{αλλ.} \\ -\Delta U = W_{αλλ.} \Rightarrow -(U_2 - U_1) = W_{αλλ.} \end{array}\right\} \Rightarrow K_2 - K_1 = -(U_2 - U_1) \Rightarrow$$

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \Rightarrow E_1 = E_2$$

Απόδειξη 6

Να βρεθεί η εξίσωση της ταχύτητας που φτάνει στο έδαφος, ενός σώματος που εκτελεί οριζόντια βολή, με αρχική ταχύτητα υ_0 από ύψος h.

Σώμα μικρών διαστάσεων (αμελητέα η αντίσταση του αέρα), βάλλεται οριζόντια με ταχύτητα υ_0, από ύψος h. Επειδή ασκείται μόνο το βάρος ισχύει η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας:

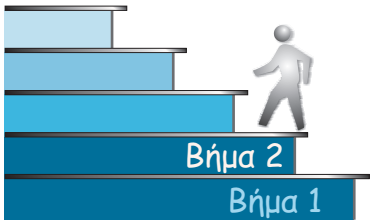
Από Α.Δ.Μ.Ε. έχουμε για την ταχύτητα υ στο έδαφος:

$$E_{(A)} = E_{(\Gamma)} \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 + mgh = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + 2gh}$$

Απόδειξη 7

Να αποδείξετε ότι: P = F · υ αν η F = σταθ και $\vec{F} \uparrow\uparrow \vec{\upsilon}$:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F\cdot x}{t} = F\cdot\upsilon$$

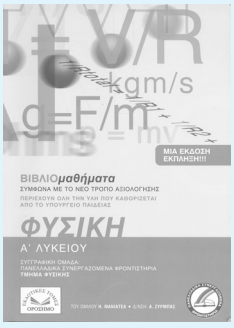


Επαναλαμβάνουμε τις ασκήσεις “κλειδιά”

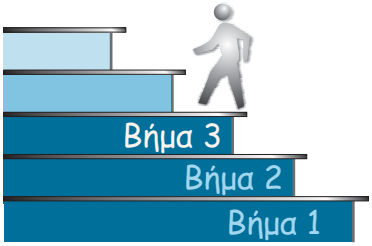
Α. Από το σχολικό βιβλίο ΦΥΣΙΚΗ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ έκδοση 2003.

σ.σ. 247 - 250: Ερωτήσεις 1, 2, 4, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16
σ.σ. 251 - 253: Ασκήσεις 1, 4, 5, 12, 16, 19, 22

Β. Από τα Βιλιομαθήματα ΦΥΣΙΚΗ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ εκδόσεις “ΟΡΟΣΗΜΟ”

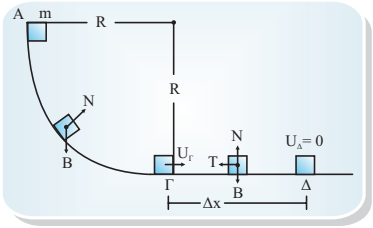


σ. 184: Ερωτήσεις 5, 6, 7, 8, 9, 10
σ.σ. 185 - 189: Ασκήσεις 4, 7, 12, 15, 16, 18, 19
σ. 208: Ερωτήσεις 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11
σ.σ. 209 - 213 : Ασκήσεις 4, 6, 8, 10, 14, 15, 16



Λύνουμε περισσότερες ασκήσεις

1. **Σώμα μάζας $m = 1kg$ βρίσκεται στο ανώτερο σημείο Α του τεταρτοκυκλίου που είναι λείο. Αν το αφήσουμε ελεύθερο, φθάνοντας στο κατώτερο σημείο του τεταρτοκυκλίου Γ, συνεχίζει την κίνησή του σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,2$.**



Αν η ακτίνα του τεταρτοκυκλίου είναι $R = 1m$ να βρείτε:

α. την ταχύτητα του σώματος όταν διέρχεται από το κατώτερο σημείο Γ του τεταρτοκυκλίου.

β. τη μετατόπιση του σώματος πάνω στο οριζόντιο επίπεδο

γ. μετατροπές ενέργειας που έχουμε κατά τη διάρκεια της κίνησης του σώματος.

Λύση:

α. ΘΜΚΕ $A \to \Gamma$: $\Sigma W_F = \Delta K \Rightarrow W_B + W_N = K_\Gamma - K_A \Rightarrow W_B = K_\Gamma \Rightarrow$

$$m \cdot g \cdot R = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon_\Gamma^2 \Rightarrow \upsilon_\Gamma = \sqrt{2g \cdot R} \Rightarrow \upsilon_\Gamma = \sqrt{20} \text{ m/s}$$

β. ΘΜΚΕ $A \to \Delta$: $\Sigma W_F = \Delta K \Rightarrow W_T + W_B = K_\Delta - K_A \Rightarrow W_T + W_B = 0$

$$-\mu \cdot m \cdot g \cdot \Delta x + m \cdot g \cdot R = 0 \Rightarrow \Delta x = \frac{R}{\mu} = \frac{1m}{0,2} \Rightarrow \Delta x = 5m$$

γ. $W_N = 0$ ($\vec{N}$ πάντοτε κάθετη στη μετατόπιση), $K_A = 0$ ($\upsilon_0 = 0$)

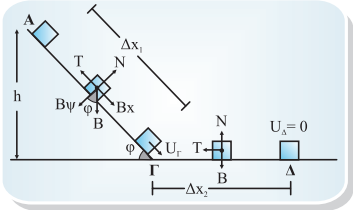
$K_\Delta = 0$ (στο σημείο Δ το σώμα σταματάει)

$T = \mu N$ $(\Sigma Fy = 0 \Rightarrow N - B = 0 \Rightarrow N = B \Rightarrow N = m \cdot g)$

Η αρχική δυναμική ενέργεια στο σημείο Α ($U_A = mgR$) μετατρέπεται αρχικά μέσω του έργου του βάρους σε κινητική ενέργεια στο σημείο Γ: $\left(K_\Gamma = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon_\Gamma^2\right)$. Κατόπιν μετατρέπεται σε θερμότητα (μέσω του έργου της τριβής) στη διαδρομή ΓΔ πάνω στο οριζόντιο επίπεδο.

2. **Σώμα μάζας $m = 1kg$ αφήνεται στο σημείο Α κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης $\varphi = 60^o$ που βρίσκεται σε ύψος $h = 1m$ από το οριζόντιο επίπεδο. Όταν το σώμα φθάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου συνεχίζει σε οριζόντιο επίπεδο μέχρις ότου σταματήσει.**
Αν το σώμα παρουσιάζει τον ίδιο συντελεστή τριβής και στα δύο επίπεδα $\mu = \frac{\sqrt{3}}{4}$ να βρεθούν:
α. Η ταχύτητα του σώματος στη βάση Γ του κεκλιμένου επιπέδου.
β. Η μετατόπιση του σώματος πάνω στο οριζόντιο επίπεδο.
γ. Τις μετατροπές ενέργειας που έχουμε κατά τη διάρκεια της κίνησης.
δ. Το ποσοστό της αρχικής δυναμικής ενέργειας που γίνεται θερμότητα στη κίνηση πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο.

Λύση:



$B_x = B\eta\mu\varphi = m\cdot g\cdot\eta\mu\varphi$, $B_y = B\sigma\upsilon\nu\varphi = m\cdot g\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi$

$$\eta\mu\varphi = \frac{h}{\Delta x_1} \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{h}{\eta\mu\varphi}$$

α. ΘΜΚΕ $A \rightarrow \Gamma : \Sigma W_F = \Delta K \Rightarrow$

$$W_{B_x} + W_{B_y} + W_T + W_N = K_\Gamma - K_A \Rightarrow$$

$$W_{B_x} + W_T = K_\Gamma \Rightarrow B_x\cdot\Delta x_1 - T_1\cdot\Delta x_1 = \frac{1}{2}m\cdot\upsilon_\Gamma^2 \Rightarrow$$

$$m\cdot g\cdot\eta\mu\varphi\frac{h}{\eta\mu\varphi} - \mu\cdot m\cdot g\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi\frac{h}{\eta\mu\varphi} = \frac{1}{2}m\cdot\upsilon_\Gamma^2 \Rightarrow$$

$$\upsilon_\Gamma = \sqrt{2(g\cdot h - \mu\cdot g\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi\frac{h}{\eta\mu\varphi})} \Rightarrow \upsilon_\Gamma = \sqrt{2g\cdot h\left(1 - \mu\frac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{\eta\mu\varphi}\right)} \Rightarrow \upsilon_\Gamma = \sqrt{15}m/s$$

$W_N = 0$, $W_{B_y} = 0$ και $K_A = 0$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - B_y = 0 \Rightarrow N = B_y \Rightarrow N = B\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow N = m\cdot g\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi$$

β. Στο οριζόντιο επίπεδο ισχύει: $K_\Delta = 0$ και $W_B = 0$,

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - B = 0 \Rightarrow N = B \Rightarrow N = m\cdot g$$

ΘΜΚΕ $\Gamma \rightarrow \Delta$: $\Sigma W_F = \Delta K \Rightarrow$

$$W_B + W_N + W_T = K_\Delta - K_\Gamma \Rightarrow \Delta x_2 = \frac{\upsilon_\Gamma^2}{2\mu\cdot g} \Rightarrow \Delta x_2 = \sqrt{3}m$$

γ. Η αρχική Δυναμική ενέργεια στο Α μέσω του έργου του βάρους μετατρέπεται σε κινητική στο Γ και μέσω του έργου της τριβής μετατρέπεται σε θερμότητα μέχρι το Γ. Μετά όλη η κινητική στο Γ θα μετατραπεί μέσο του έργου της τριβής σε θερμότητα έως το Δ.

δ. $U_\beta = m \cdot g \cdot h = 10J$, $K = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon_\Gamma^2 \Rightarrow K = 2,5J$

άρα $Q = U_\beta - K = 10J - 2,5J = 7,5\ J$, επομένως: $\frac{Q}{U_\beta} = \frac{7,5\ J}{10\ J} = 0,75$ ή 75%

3. Σφαιρίδιο μάζας $m_1 = 2kg$ είναι δεμένο στο άκρο κατακόρυφου νήματος μήκους $L = 0,8m$. Εκτρέπουμε το σφαιρίδιο ώστε το νήμα να γίνει οριζόντιο και το αφήνουμε ελεύθερο. Όταν το νήμα γίνει πάλι κατακόρυφο το σφαιρίδιο συναντά σώμα $m_2 = 6kg$ που ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Αν το σφαιρίδιο μετά την κρούση επιστέφει με ταχύτητα μισή της ταχύτητας πριν την κρούση να βρεθούν:

α. η ταχύτητα του σφαιριδίου με την οποία συναντά το σώμα

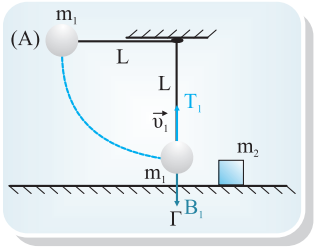
β. την τιμή της τάσης του νήματος λίγο πριν το σφαιρίδιο συναντήσει το σώμα

γ. την ταχύτητα του σώματος μετά τη συνάντηση

δ. το διάστημα που θα διανύσει το σώμα m_2 έως ότου σταματήσει είναι $S = 2m$, να βρεθεί ο συντελεστής τριβής μεταξύ σώματος και επιπέδου

ε. σε τι ύψος θα ξαναφθάσει το m_1 στιγμιαία;

Λύση:



α. Θ.Μ.Κ.Ε. : $\Sigma W_F = \Delta K \Rightarrow W_B + W_T = K_\Gamma - K_A$

Επειδή $W_T = 0,\ K_A = 0$ ισχύει: $m \cdot g \cdot L = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2$

$\upsilon_1 = \sqrt{2g \cdot L} \Rightarrow \upsilon_1 = 4m/s$

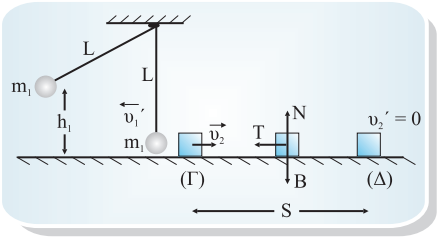
β. $\Sigma F_R = m_1 \frac{\upsilon_1^2}{L} \Rightarrow T_1 - B_1 = m_1 \frac{\upsilon_1^2}{L} \Rightarrow$

$T_1 = m_1 \cdot g + m_1 \frac{\upsilon_1^2}{L} \Rightarrow T_1 = m_1 \left(g + \frac{\upsilon_1^2}{L} \right) \Rightarrow T_1 = 60N$

γ. Α.Δ.Ο.: $\vec{P}_{ολ,\ πριν} = \vec{P}_{ολ,\ μετα} \Rightarrow m_1 \upsilon_1 = -m_1 \frac{\upsilon_1}{2} + m_2 \upsilon_2 \Rightarrow m_1 \upsilon_1 + m_1 \frac{\upsilon_1}{2} = m_2 \upsilon_2 \Rightarrow$

$3m_1 \frac{\upsilon_1}{2} = m_2 \upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_2 = \frac{3m_1 \upsilon_1}{2m_2} \Rightarrow \upsilon_2 = 2m/s$

δ. Θ.Μ.Κ.Ε. $\Gamma \rightarrow \Delta$: $\Sigma W_F = \Delta K$



$$W_{N=0} + W_{B=0} + W_T = K_{\Delta=0} - K_\Gamma$$

$$-\mu m_2 g \cdot S = -\frac{1}{2} m_2 \upsilon_2^2 \Rightarrow \mu = \frac{\upsilon_2^2}{2 \cdot g \cdot S} = 0,1$$

ε. Α.Δ.Μ.Ε.: $K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda}$

Επειδή $U_{\alpha\rho\chi} = 0,\ K_{\tau\varepsilon\lambda} = 0$

$$\frac{1}{2} m_1 \left(\frac{\upsilon_1}{2}\right)^2 = m_1 \cdot g \cdot h_1 \Rightarrow h_1 = \frac{\upsilon_1^2}{8g} \Rightarrow h_1 = 0,2m$$

4. Σώμα μάζας $m = 4kg$ που ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο δέχεται δύναμη $F = 20N$ υπό γωνία φ ως προς αυτό και αφού το μετατοπίσει κατά $\Delta x_1 = 5m$ παύει να ασκείται. Το σώμα συνεχίζει να κινείται και σταματάει λόγο τριβών. Αν ο συντελεστής μεταξύ σώματος και επιπέδου είναι $\mu = 0,2$, να βρεθούν:

α. η ταχύτητα του σώματος όταν παύει να ασκείται η δύναμη

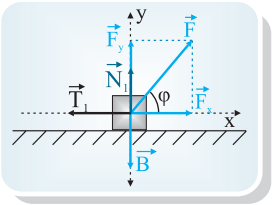
β. η συνολική μετατόπιση του σώματος.

Δίνεται: $ημφ = 0,8,\ συνφ = 0,6,\ \upsilon_0 = 0$

Λύση:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 + F_y - B = 0 \Rightarrow N_1 = B - F_y \Rightarrow$$

$$N_1 = m \cdot g - F ημφ \Rightarrow T_1 = \mu N_1 = \mu (m \cdot g - f ημφ)$$



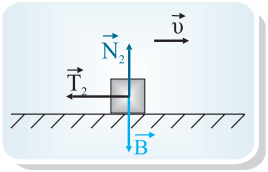
α. Θ.Μ.Κ.Ε. $\Sigma W_f = \Delta K$

$$WF_x + WF_y + W_B + W_{N=0} + W_\Gamma = K_\Gamma = K_{A=0}$$

$$F συνφ \cdot \Delta x_1 - \mu (m \cdot g - F ημφ) \Delta x_1 = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 \Rightarrow \upsilon = 3\sqrt{2} m/s$$

Μετά $\Delta x = 5m$

β. $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_2 - B = 0 \Rightarrow N_2 = B \Rightarrow N_2 = m \cdot g$



$T_2 = \mu N_2 = \mu m \cdot g$. Επειδή $\Sigma W_F = \Delta K$

$$W_{T_2} + W_{N_2} + W_B = K_\Delta - K_\Gamma \Rightarrow -\mu \cdot m \cdot g \cdot \Delta x_2 = -\frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2$$

$$\Delta x_2 = \frac{\upsilon^2}{2\mu \cdot g} = 4,5m.\ \ \Delta x_{o\lambda} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 5m + 4,5m = 9,5m$$

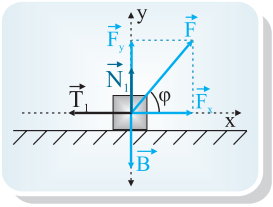
5. **Σώμα μάζας $m = kg$ ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Δύναμη $F = 20N$ ασκείται στο σώμα υπό γωνία φ, για χρόνο $t = 5s$ και στη συνέχεια παύει να ασκείται. Το σώμα συνεχίζει να κινείται και σταματάει λόγω τριβών. Αν ο συντελεστής τριβής μεταξύ σώματος ή επιπέδου είναι $\mu = 0,2$ να βρεθεί:**

α. η ταχύτητα του σώματος όταν παύει να ασκείται η δύναμη

β. η μετατόπιση του κατά τη διάρκεια όλης της κίνησης

Λύση:

α. $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 + F\eta\mu\varphi - B = 0 \Rightarrow N_1 = B - F\eta\mu\varphi \Rightarrow$



$N_1 = m\cdot g - F\eta\mu\varphi \ (1)$, $T_1 = \mu N_1 \overset{(1)}{=} \mu(m\cdot g - F\eta\mu\varphi) \ (2)$

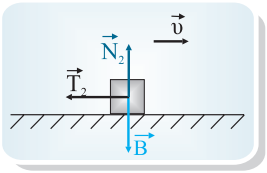
$\Sigma F_x = m\cdot\alpha \Rightarrow F\sigma\upsilon\nu\varphi - T_1 = m\cdot\alpha_1 \overset{(2)}{\Rightarrow}$

$F\sigma\upsilon\nu\varphi - \mu(m\cdot g - F\eta\mu\varphi) = m\cdot\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = 1,8m/s^2$

Μετά $t = 5s$

$\upsilon = \alpha_1\cdot t_1 = 9m/s \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{1}{2}\alpha_1\cdot t_1^2 = 22,5m$

β. $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_2 - B = 0 \Rightarrow N_2 = B \Rightarrow N_2 = m\cdot g \quad (3)$



$\Sigma F_x = m\cdot\alpha \Rightarrow T_2 = m\cdot\alpha \Rightarrow \mu N_2 = m\cdot\alpha_2 \overset{(3)}{\Rightarrow}$

$\mu m\cdot g = m\cdot\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = \mu\cdot g \Rightarrow \alpha_2 = 2m/s^2$

$\upsilon = \upsilon_0 - \alpha_2\cdot t_2 \Rightarrow 2t = 9s \Rightarrow t = 4,5s$

$\Delta x_2 = \upsilon_0\cdot t_2 - \frac{1}{2}\alpha_2 t_2^2 \Rightarrow \Delta x_2 = 20,25m$

$\Delta x_{ολ} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 22,5m + 20,25m = 42,25m$

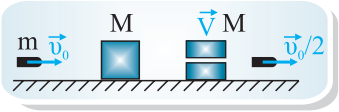
6. **Σώμα μαζας $M = 5kg$ ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,1$. Βλήμα κινούμενο οριζόντια με ταχύτητα $\upsilon_0 = 100m/s$ και μάζας $m = 0,1kg$ διαπερνά το σώμα και η ταχύτητα του γίνεται $\upsilon_0/2$. Να βρεθούν:**

α. Η ταχύτητα του σώματος Μ μετά την έξοδο του βλήματος.

β. Η μεταβολή της ορμής του σώματος Μ από τη στιγμή που ηρεμούσε μέχρι την έξοδο του βλήματος.

γ. Η μέση δύναμη που δέχεται το σώμα κατά τη διάρκεια της "κρούσης" αν αυτή διαρκεί $\Delta t = 0{,}01$ s.

δ. Η θερμότητα που παράγεται κατά την κίνηση του σώματος Μ πάνω στο οριζόντιο επίπεδο, καθώς και η μετατόπιση μέχρι να σταματήσει το σώμα μάζας Μ..



Λύση:

α. Α.Δ.Ο.

$$\vec{p}_{ολ,πριν} = \vec{p}_{ολ,μετα} \Rightarrow m\cdot\upsilon_0 = M\cdot V + m\frac{\upsilon_0}{2} \Rightarrow m\cdot\upsilon_0 - m\frac{\upsilon_0}{2} = M\cdot V \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\frac{\upsilon_0}{2} = M\cdot V \Rightarrow V = \frac{m\cdot\upsilon_0}{2M} \Rightarrow V = 1m/s$$

β. $\Delta\vec{p}_M = \vec{p}_{μετά} - \vec{p}_{πριν} \Rightarrow \Delta p_M = M\cdot V - 0 \Rightarrow \Delta p_M = 5kg\cdot 1m/s = 5kgm/s$

γ. $\vec{F}_M = \frac{\Delta\vec{p}_M}{\Delta t} \Rightarrow F_M = \frac{\Delta p_M}{\Delta t} \Rightarrow F_M = \frac{5kgm/s}{0{,}01s} = 500N$

δ. $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - B = 0 \Rightarrow N = B \Rightarrow N = M\cdot g \Rightarrow T = \mu\cdot N = \mu\cdot M\cdot g$

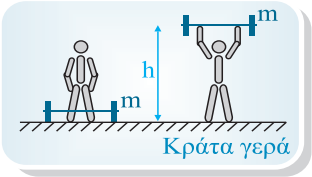
Από Θ.Μ.Κ.Ε.: $\Sigma W_F = \Delta K \Rightarrow W_B + W_N + W_T = K_Γ - K_A$

Επειδή $W_B = W_N = K_Γ = 0$ τότε

$$-\mu\cdot M\cdot g\cdot\Delta x = -\frac{1}{2}\cdot M\cdot V^2 \Rightarrow \Delta x = \frac{V^2}{2\mu\cdot g} \Rightarrow \Delta x = 0{,}5m$$

$$Q = |W_T| \Rightarrow Q = \mu\cdot M\cdot g\cdot\Delta x \Rightarrow Q = 2{,}5J$$

7. Στην Ολυμπιάδα του Σύδνεϋ το 2000 ο αρσιβαρίστας μας Πύρρος Δήμας σήκωσε στο αρασέ μάζα $m = 250kg$ σε ύψος $h = 1{,}8m$.



Να βρεθούν:

α. το έργο της δύναμης που έβαλε ο Πύρρος για να σηκώσει τα βάρη

β. το έργο του βάρους

γ. τη δυναμική ενέργεια που έχουν τα βάρη στο ύψος h

δ. την ισχύ του Πύρρου αν σηκώσει τα βάρη σε $t = 5s$

ε. όταν τα αφήνει ο Πύρρος από το ύψος h, να βρεθεί η ταχύτητα με την οποία προσπίπτουν στο δάπεδο.

Θεωρούμε ότι ο Πύρρος σηκώνει τα βάρη με σταθερή ταχύτητα και $g = 10m/s^2$

Λύση

α. $W_F = F \cdot h = B \cdot h = m \cdot g \cdot h \Rightarrow W = 250kg \cdot 10\frac{m}{s^2} \cdot 1,8m \Rightarrow W = 4500J$

επειδή υ = σταθερή, $\Sigma F = 0 \Rightarrow F - B = 0 \Rightarrow F = B$

β. $W_B = -m \cdot g \cdot h \Rightarrow W_B = -250kg \cdot 10m/s^2 \cdot 1,8m \Rightarrow W_B = -4500J$

γ. $W_B = -\Delta U \Rightarrow W_B = -\left(U_{\tau\varepsilon\lambda} - U_{\alpha\rho\chi}\right) \Rightarrow W_B = -U_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow U_{\tau\varepsilon\lambda} = 4500J$

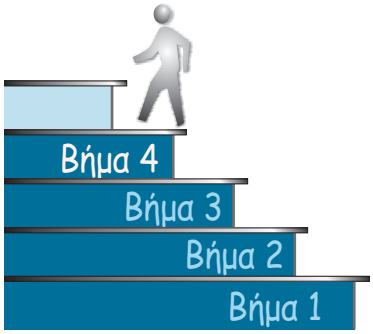
δ. $P = \frac{W_F}{t} = \frac{4500J}{5s} = 900W$

ε. Α.Δ.Μ.Ε.

$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda}$

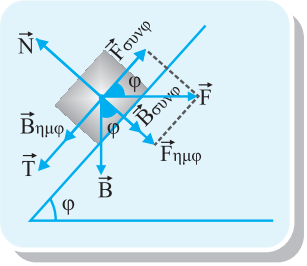
Επειδή $K_{\alpha\rho\chi} = 0,\ U_{\tau\varepsilon\lambda} = 0$

$$U_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2U_{\alpha\rho\chi}}{m}} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2 \cdot 4500J}{250kg}} \Rightarrow \upsilon = 6m/s$$



Λύνουμε μόνοι μας

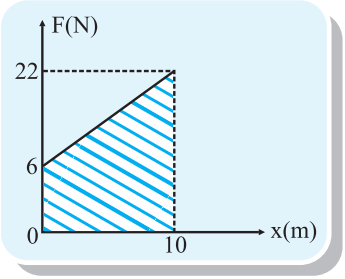
1. Σώμα μάζας $m = 1kg$ ανεβαίνει κεκλιμένο επίπεδο με τη βοήθεια οριζόντιας δύναμη F με σταθερή ταχύτητα $υ = 10m/s$. Ο συντελεστής τριβής ανάμεσα στο σώμα και το επίπεδο είναι $μ = 0,5$. Αν το σώμα μετατοπιστεί κατά $Δx = 5m$ να βρείτε:



α. το έργο της δύναμης
β. το έργο του βάρους
γ. το έργο της τριβής
δ. το έργο της συνισταμένης των δυνάμεων
ε. ποια η ισχύς της δύναμης F.

Δίνονται $ημφ = 0,6$, $συνφ = 0,8$, $g = 10m/s^2$.

2. Σώμα ξεκινά από την ηρεμία με την άσκηση δύναμης F (οριζόντιας) που το μέτρο της μεταβάλεται όπως δείχνει το διάγραμμα $F - x$. Αν η δύναμη καταργείται μετά από $Δx_1 = 10m$ να βρεθούν:



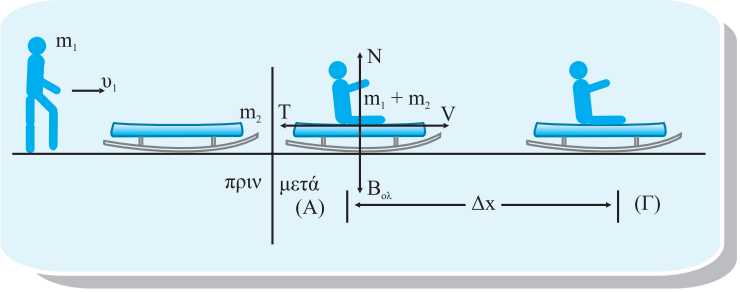
α. τη ταχύτητα του σώματος τη στιγμή της κατάργησης της δύναμης F
β. τη μετατόπιση του σώματος μετά την κατάργηση της δύναμης έως όταν σταματήσει
γ. τη συνολική θερμότητα που παράχθηκε.

Δίνεται συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος του οριζοντίου επιπέδου $μ = 0,2$ και μάζα σώματος $m = 2kg$, $g = 10m/s^2$.

3. Έλκηθρο ηρεμεί σε πίστα χιονοδρομικού κέντρου και έχει μάζα $m_2 = 45kg$. Ένα παιδί μάζας $m_1 = 30kg$ τρέχοντας με ταχύτητα

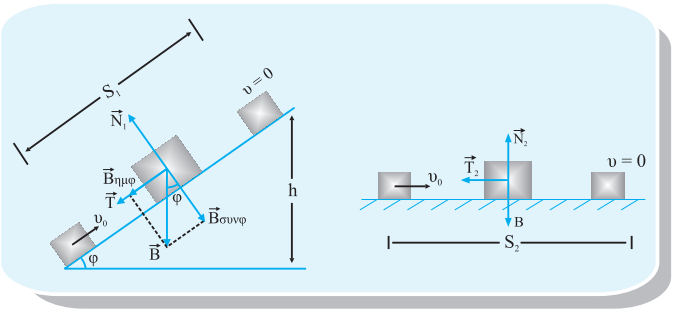
$\upsilon_1 = 10\,m/s$ πηδάει πάνω στο έλκηθρο. Αν ο συντελεστής μεταξύ έλκηθρου και χιονιού είναι $\mu = 0,05$ να βρεθούν:

α. η κοινή ταχύτητα έλκηθρου - παιδιού
β. η μεταβολή της ορμής του παιδιού
γ. η απόσταση που θα διανύσει το έλκηρθο μέχρι να σταματήσει αν η πίστα είναι οριζόντια
δ. την απώλεια κινητική ενέργειας του συστήματος παιδί - έλκηθρο κατά την "κρούση" τους. Δίνεται $g = 10\,m/s^2$



4. Σώμα ρίχνεται με ταχύτητα υ_0 κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου $\varphi = 60^o$ προς τα πάνω και διανύει διάστημα $S_1 = 8m$ μέχρι να σταματήσει. Το ίδιο σώμα ρίχνεται με την ίδια ταχύτητα υ_0 σε οριζόντιο επίπεδο και διανύει διάστημα $S_2 = 16m$ μέχρι να σταματήσει. Αν το σώμα παρουσιάζει τον ίδιο συντελεστή τριβής με τα δύο επίπεδα να βρεθούν:

α. ο συντελεστής τριβής
β. η αρχική ταχύτητα του σώματος
γ. η θερμότητα που παράγεται στις δύο διαδρομές
δ. γιατί δεν είναι ίδια αφού την ίδια αρχική κινητική ενέργεια δώσαμε στο σώμα. Δίνεται $m = 2kg$ και $g = 10\,m/s^2$.



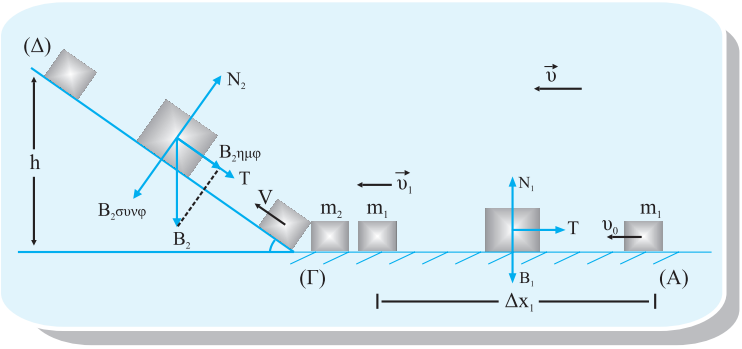
5. Σώμα μάζας $m_1 = 1kg$ εκτοξεύεται με ταχύτητα $\upsilon_0 = 10m/s$ πάνω σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής $\mu = 0,2$. Όταν διανύσει απόσταση $\Delta x_1 = 9m$ συναντά σώμα μάζας $m_2 = 3kg$ και η κρούση είναι πλαστική. Στη συνέχεια το συσσωμάτωμα ανεβαίνει κεκλιμένο επίπεδο γωνίας φ όπως δείχνει το σχήμα. Αν το συσσωμάτωμα παρουσιάζει τον ίδιο συντελεστή τριβής με το κεκλιμένο επίπεδο να βρεθούν:

α. η ταχύτητα του σώματος m_1 πριν συγκρουστεί με το σώμα m_2

β. την κοινή τους ταχύτητα μετά τη σύγκρουση

γ. το ύψος που θα ανέβει το συσσωμάτωμα πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο.

Δίνεται $g = 10m/s^2$



6. Εργάτης μεταφέρει κουβά γεμάτο χαλίκι μάζας $m = 20kg$ στο δεύτερο όροφο οικοδομής από το δρόμο, ανεβαίνοντας $N = 30$ σκαλιά. Αν το ύψος κάθε σκαλιού είναι $h = 20cm$ και ο εργάτης ανεβαίνει με σταθερή τιμή ταχύτητας να βρεθούν:

α. το έργο της δύναμης του εργάτη

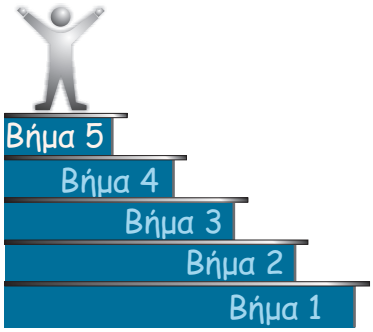
β. το έργου του βάρους του κουβά

γ. η δυναμική ενέργεια του κουβά στο δεύτερο όροφο της οικοδομής

δ. η ισχύς του εργάτη αν χρειάστηκε 60s για να ανεβάσει τον κουβά

ε. αν ο κουβάς φύγει από τα χέρια του εργάτη και πέσει ελεύθερα στο κενό με τι ταχύτητα προσκρούει στο δρόμο;

Δίνεται $g = 10m/s^2$



Ελέγχουμε τις γνώση μας

Θέμα 1ο

1. Το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας εκφράζει ότι το συνολικό ..... δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα είναι ..... με την μεταβολή ..... του σώματος.

2. Να αντιστοιχίσετε τις μονάδες της αριστερής στήλης με τα φυσικά μεγέθη της δεξιάς στήλης.

Μονάδες	Φυσικά μεγέθη
α. N	**1.** Ενέργεια
β. m	**2.** Δύναμη
γ. $N \cdot m$	**3.** Μετατόπιση
δ. J	**4.** Έργο

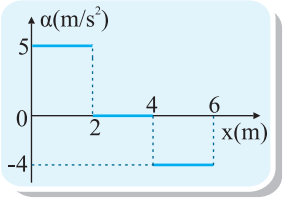
3. Από ύψος 1m αφήνουμε να πέσει ένα φύλλο χαρτί. Ποιες από τις παρακάτω αρχές ισχύουν:
α. Διατήρηση της ορμής
β. Διατήρηση της μηχανικής ενέργειας
γ. Θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας
δ. Διατήρηση της ενέργειας

4. Συμπληρώστε τα κενά:
Το έργο του βάρους είναι ..... της διαδρομής που ακολουθεί το σώμα και εξαρτάται από την ..... και από την διαφορά ..... .

5. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της αριστερής στήλης με τις μονάδες τους

α. έργο	$1kg\frac{m}{s}$
β. ρυθμός ενέργειας	1 J
γ. ενέργεια	1 N
δ. δύναμη	1 W
ε. ορμή	

Θέμα 2ο



α. Η επιτάχυνση ενός σώματος που αρχικά ηρεμεί και έχει μάζα $m = 2kg$, μεταβάλλεται με την μετατόπιση όπως στο σχήμα. Να υπολογίσετε το έργο που παράγεται για μετατόπιση από 0 έως 6m, καθώς και την ταχύτητά του στην θέση 6m.

β. Είναι δυνατόν να ασκείται δύναμη σε κάποιο σώμα και να μην παράγεται έργο; Αναφέρετε ένα π.χ. για να υποστηρίξετε την άποψή σας

γ. Ένα σώμα μικρών διαστάσεων βάλλεται οριζόντια από ύψος h με αρχική ταχύτητα υ_0. Αν είναι γνωστή η επιτάχυνση της βαρύτητας να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητάς του τη στιγμή που φθάνει στο έδαφος (αντίσταση του αέρα αμελείται).

Θέμα 3ο

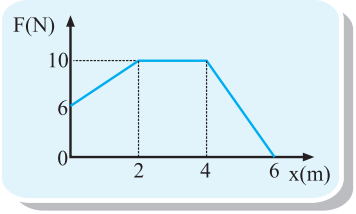
Σώμα μάζας $m = 2kg$ που αρχικά ηρεμεί σε κεκλιμένο δάπεδο γωνίας $\varphi = 30^o$ με το οποίο παρουσιάζει συντελεστής τριβής ολίσθησης $\mu = \frac{\sqrt{3}}{6}$, δέχεται την επίδραση σταθερής δύναμης $\vec{F}$, μέτρου $F = 19N$ παράλληλη στο κεκλιμένο δάπεδο.

Αν $g = 10m/s^2$ να υπολογίσετε:

α. Την επιτάχυνση του σώματος.

β. Την μετατόπιση του την στιγμή που έχει ταχύτητα $\upsilon = 8m/s$.

Θέμα 4ο



Σώμα μάζας $m = 2kg$, που αρχικά ηρεμεί σε οριζόντιο δάπεδο με το οποίο έχει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,1$. Στο σώμα ασκείται οριζόντια δύναμη που μεταβάλλεται με τη θέση όπως στο σχήμα. Να υπολογίσετε:

α. Το έργο της F για μετατόπιση από 0 έως 6m.

β. Το έργο της τριβής για την ίδια μετατόπιση.

γ. Την ταχύτητά του στην θέση $x = 6m$.

Δίνεται $g = 10m/s^2$

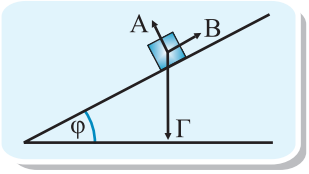
Γενικό Διαγώνισμα

Θέμα 1ο

1. Καθώς μια μικρή σφαίρα εκτελεί οριζόντια βολή, χωρίς αντιστάσεις πέφτει στο έδαφος.

α. Η κινητική της ενέργεια διατηρείται
β. Η κινητική της ενέργεια μετατρέπεται σε δυναμική
γ. Η δυναμική της ενέργεια διατηρείται
δ. Η δυναμική της ενέργεια μετατρέπεται σε κινητική

2. Ένα σώμα κατέρχεται ολισθαίνοντας στο κεκλιμένο δάπεδο. Να αντιστοιχίσετε τα διανύσματα του διαγράμματος με τα φυσικά μεγέθη της δεξιάς στήλης.



α. Βάρος σώματος
β. Τριβή ολίσθησης
γ. Κάθετη αντίδραση
δ. Στατική τριβή

3. Δύο δυνάμεις 6N και 2N ακούνται στο ίδιο σώμα. Πόση είναι η συνισταμένη δύναμη;

α. 8N **β.** 4N
γ. 5N **δ.** τα στοιχεία δέν επαρκούν για την απάντηση.

4. Να χαρακτηρίσετε με (Σ) τις σωστές προτάσεις και με (Λ) τις λανθασμένες.

α. Στο διάγραμμα υ(t) το εμβαδόν μας δείχνει αριθμητικά την επιτάχυνση. ( )
β. Για να κινείται ένα σώμα με σταθερή ταχύτητα πρέπει να ασκείται πάνω του μια δύναμη. ( )
γ. Για να ισορροπεί ένα σώμα υπό την επίδραση τριών ομοεπιπέδων δυνάμεων πρέπει η συνισταμένη των δύο να είναι αντίθετη της τρίτης. ( )
δ. Το βάρος μας είναι πάντα εσωτερική δύναμη. ( )
ε. Μια δύναμη δεν παράγει έργο, όταν είναι κάθετη στην μετατόπιση. ( )

5. Να αντιστοιχίσετε τα μεγέθη της αριστερής στήλης με τις μονάδες της δεξιάς στήλης.

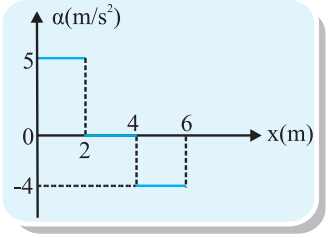
Α. επιτάχυνση	**α.** 1J
Β. ορμή	**β.** $1N\frac{m}{S^2}$
Γ. δύναμη	**γ.** $1\frac{m}{S^2}$
Δ. κινητική ενέργεια	**δ.** $1N \cdot m$
Ε. έργο	**ε.** $1kg\frac{m}{S}$

Θέμα 2ο

1. Μικρή σφαίρα εκτοξεύεται οριζόντια από μικρό ύψος h με ταχύτητα υ_0. Αν είναι γνωστό το g να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας που πέφτει στο έδαφος, με την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας.

2. Να διατυπώσετε τον 1ο νόμο του Νέυτωνα και να δώσετε ένα παράδειγμα.

3. Η επιτάχυνση ενός σώματος που ηρεμεί κια έχει μάζα $m = 2kg$, μεταβάλλεται με την μετατόπιση όπως στο σχήμα. Να υπολογίσετε το έργο που παράγεται για μετατόπιση από 0 έως 6m, καθώς και την ταχύτητά του στη θέση 6m.



Θέμα 3ο

1. Σε σώμα μάζας $m = 50kg$ που ηρεμεί σε οριζόντιο δάπεδο, ενεργεί σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 150N$ και το μετατοπίζει κατά $x_1 = 20m$. Στη συνέχεια το σώμα μετατοπίζεται χωρίς την επίδραση της δύναμης και τελικά σταματάει, αφού διανύσει ακόμη μετατόπιση $x_2 = 30m$. Να υπολογίσετε:

α. Το ολικό έργο της τριβής.

β. Τον συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος και του δαπέδου.

Δίνεται $g = 10m/s^2$.

Θέμα 4ο

Ένα αυτοκινητάκι διατρέχει το πρώτο μισό μιας ευθύγραμμης πίστας μήκους 100m με σταθερή ταχύτητα 5m/s. Στο δεύτερο μισό της πίστας παρουσιάζει μηχανικό πρόβλημα και επιβραδύνεται με σταθερή επιβράδυνση $0,2m/s^2$.

α. Σε πόσο χρόνο θα διατρέξει την απόσταση των 100m;

β. Με ποια ταχύτητα τερματίζει;